



Использование компьютерного пакета SMath на уроках математики в школе

Цель работы заключается в разработке методических подходов к внедрению профессионального компьютерного пакета SMath Studio (далее SMath) на уроках математики в школе. Предпосылкой исследования послужил опыт использования авторами данного пакета в вузовском образовании, который предлагается распространить на школьное обучение. Актуальность работы обусловлена рядом причин. Во-первых, происходящее в последние десятилетия активное внедрение цифровых инструментов в преподавательскую деятельность в школе требует развития у учеников навыка осознанного использования компьютера как инструмента исследовательской деятельности. Во-вторых, необходимо сократить разрыв между учебным решением задач и реальной научной работой, что может обеспечиваться использованием на уроках профессионального пакета SMath, а не тренировочной программы. В-третьих, существует потребность в новых методах стимулирования когнитивных и мотивационных качеств школьников (особенно слабоуспевающих) на занятиях. В статье описываются пути решения отмеченных проблем с помощью использования на уроках математики пакета SMath.

Методы. Был использован метод сравнительного анализа ситуаций, вызывающих у учащихся затруднение при овладении основными образовательными навыками при изучении математики в школе. На основе этого анализа был осуществлён выбор рассмотренных примеров, для которых преимущество применения пакета SMath являлось наиболее наглядным. При решении всех типов уравнений использовался метод визуализации с помощью графических средств SMath, реализуемый непосредственно школьниками. При решении геометрической задачи использован метод математического моделирования.

Результаты. В статье изложены методические подходы к использованию компьютерного пакета SMath на уроках математики для решения задач алгебры и геометрии различного уровня сложности. Предложены сценарии применения пакета, позволяющие развивать как базовые вычислительные навыки,

так и основополагающие навыки решения уравнений и построения графиков функций. Рассмотрены примеры решения линейных уравнений и их систем, квадратных уравнений, а также уравнений, содержащих модули, и текстовых задач, приводящих к составлению уравнений. Приведено решение геометрической задачи в среде SMath несколькими способами, в том числе как инженерной задачи с использованием единиц измерения. Продемонстрирована возможность применения элементарного и в то же время разнообразного инструментария SMath, при этом отмечены задачи, которые предназначены для классов с углубленным изучением математики. Приведены многочисленные примеры графических возможностей пакета, реализуемых непосредственно учащимися, что существенно повышает осознанность и наглядность восприятия материала школьниками. В процессе использования пакета для решения уравнений затронуты вопросы научного характера в области численных методов, что позволяет стимулировать исследовательскую деятельность учеников. Указаны перспективы использования пакета SMath в школьном математическом образовании.

Заключение. Описанные в статье методические подходы к использованию вычислительных и графических возможностей компьютерного пакета SMath могут оказать как существенную помощь учителю при подготовке к занятиям, так и способствовать более заинтересованному и осознанному восприятию учебного материала школьниками. Разработка и внедрение разнообразных сценариев применения пакета SMath на уроках математики в школе позволят продвинуть преподавание на другой уровень, соответствующий нынешним тенденциям цифровизации в образовании, а также стимулировать когнитивные и мотивационные качества учащихся, побудить их к научно-исследовательской деятельности.

Ключевые слова: компьютерный пакет SMath, школьное математическое образование.

Valery F. Ochkov¹, Inna E. Vasileva², Yuliya V. Shatskikh¹

¹ National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia

² Military Educational and Scientific Center of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy», Voronezh, Russia

Using the SMath Computer Package in School Mathematics Lessons

The aim of the paper is to develop a methodological approach to the implementation of the professional computer package SMath Studio (hereinafter SMath) in mathematics lessons at school. The research was based on the authors' experience of using this package in higher education, which is proposed to be adapted for school education. There are several reasons why such a methodology is relevant. Firstly, the introduction of digital tools into teaching activities at school in recent decades requires students to develop skills in using a computer as a tool for research activities. Secondly, it is necessary to reduce the gap between educational problem solving and real scientific work, which can be achieved by using a professional SMath package in lessons rather than a training program. Thirdly, there is a need for new methods of stimulating cognitive and motivational qualities of schoolchildren (especially low-achieving ones) in the classroom. The

article describes ways to solve these problems by using the SMath package in mathematics lessons.

Methods. The method of comparative analysis of situations that cause difficulties for students in mastering basic educational skills when studying mathematics at school was used. Based on this analysis, a selection of examples was chosen for which the advantage of using the SMath package was the most obvious. When solving equations, the schoolchildren directly implemented the visualization method using SMath graphical tools. When solving a geometric problem, they used a mathematical modeling method.

Results. The paper presents methodological approaches of using the SMath computer package in mathematics lessons to solve algebra and geometry problems of various levels of complexity. Scenarios for the application of the package are proposed to develop both basic

computational skills and the fundamental skills of solving equations and constructing function graphs. Examples include linear equations and their systems, quadratic equations, equations containing modules, and text problems leading to the construction of equations. A solution to a geometric problem in the SMath environment is given in several ways, including as an engineering problem using units of measurement. The possibility of using an elementary and at the same time diverse SMath toolkit is demonstrated, while problems intended for classes with in-depth study of mathematics are noted. Numerous examples of the graphical capabilities of the package implemented directly by students are given. This significantly increases the awareness and clarity of perception of the material by schoolchildren. In the process of using the package for solving equations, scientific issues in the field of numerical methods are touched upon, which allows stimulating

research activities of pupils. The prospects for using the SMath package in school mathematics education are indicated.

Conclusion. The uses of the computational and graphical capabilities of the SMath computer package described in the article can provide both significant assistance to the teacher in preparing for classes and contribute to a more interested and conscious perception of the educational material by schoolchildren. The development and implementation of various scenarios for using the SMath package in mathematics lessons at school will advance teaching to another level, corresponding to current trends in digitalization in education, as well as stimulating the cognitive and motivational qualities of students, encouraging them to investigate further.

Keywords: SMath computer package, school mathematical education.

Введение

Внедрение цифровых инструментов в преподавательскую деятельность стало одной из основных тенденций школьного образования последних десятилетий [1–3]. Важным направлением такого внедрения является использование компьютерных математических пакетов непосредственно на уроках математики [4–7]. Можно отметить такие известные многим учителям образовательные пакеты, как «Живая математика», «Математический конструктор», «GeoGebra» [8–10], которые существенно повышают наглядность решения задач по геометрии за счет, в частности, реализации возможности динамического изменения созданного рисунка и т.п.

Здесь возникает несколько дискуссионных вопросов.

Во-первых, можно ли распространить данный положительный опыт использования математических пакетов для планиметрии на более широкий круг задач школьной математики?

Во-вторых, как найти «золотую середину» между осознанным использованием учениками компьютера как инструмента исследовательской деятельности и бездумной эксплуатацией его как «черного ящика», в который «закладывают» исходные данные и «вынимают» готовые ответы?

В-третьих, как отмечалось в работе [10], использование

компьютерных пакетов призвано сократить разрыв между учебным решением задачи и научно-исследовательской деятельностью. Какими методическими подходами можно достичь этого результата, оставаясь в рамках школьной программы?

В статье приводятся возможные пути решения этих проблем с помощью использования на уроках математики в школе компьютерного пакета SMath Studio (далее SMath [11]). Предпосылкой исследования послужил положительный опыт использования данного пакета в вузовском образовании [12], который

предлагается адаптировать для школьного обучения.

Пакет SMath – свободно распространяемая отечественная программа для вычисления математических выражений и построения двумерных и трехмерных графиков функций. Поддерживает работу с системами, матрицами, векторами, комплексными числами, дробями, а также единицами измерений. Имеет настольную версию (как под операционную систему Windows, так и Linux), облачную версию, в ближайшее время будет реализована версия для смартфонов (рис. 1).

Программа SMath, являясь отечественным аналогом из-

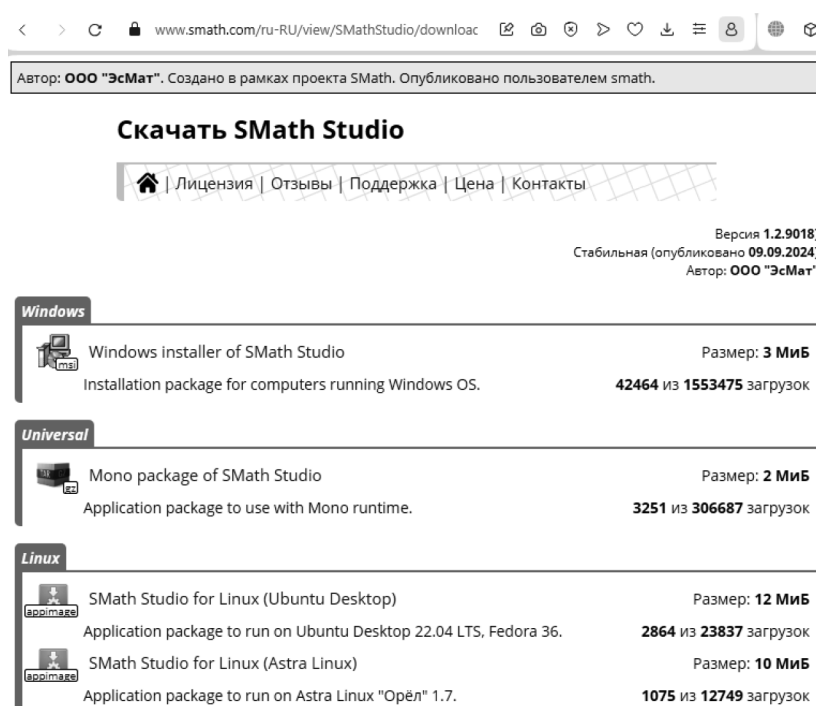


Рис. 1. Страница с официального сайта SMath Studio
Fig. 1. Page from the official website of SMath Studio

вестного инженерного пакета Mathcad, поддерживает работу с файлами Mathcad и сохраняет объективные показатели удобства работы в подобных пакетах. Перечислим возможности SMath, делающие его доступным для применения в школьном образовании.

1. Хорошая документированность расчетов. Интерфейс SMath имитирует расчет, сделанный на бумаге, поскольку рабочее поле имеет вид тетрадного листа, где можно вводить математические выражения в общепринятом виде (рис. 2).

2. Работа с единицами измерений, которая позволяет называть SMath не просто математическим, а физико-математическим пакетом.

3. Гибкая система имён переменных. Переменные и функции в среде SMath за редким исключением имеют те же имена, которые закрепились за ними в тех или иных дисциплинах задолго до появления компьютеров. Это, наряду с использованием традиционно написания математических констант, операторов и функций, а также верхних и нижних индексов, делает язык SMath доступным без особых дополнительных комментариев. Нотация в среде SMath практически совпадает с общепринятой математической нотацией: сумма, интеграл, производная, модуль, степень и т. п.

4. Численная и символьная математика, позволяющая использовать при решении задач библиотеку численных методов, предвзято или дополняя работу аналитического решения задачи.

5. Мощные и гибкие инструменты создания плоской и объемной графики, а также анимации. Это позволяет легко и быстро визуализировать исходные, промежуточные и итоговые данные без вызова внешних процедур или написания вспомогательных программ, что способствует лучшему пониманию сути расчёта,

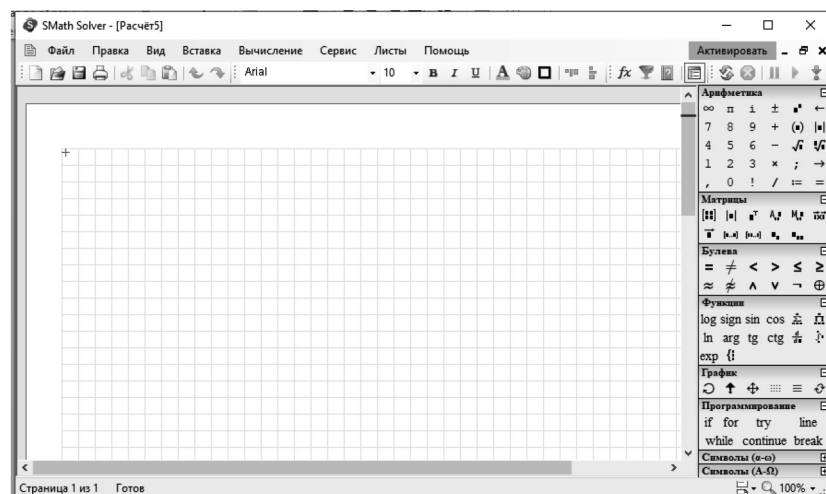


Рис. 2. Рабочее поле программы SMath
Fig. 2. Working field of the SMath program

выявлению в нем возможных ошибок и ложных путей решения поставленной задачи.

6. Программирование. В среде SMath математические действия на рабочем листе выполняются как на обычном листе бумаги — слева направо и сверху вниз. Но иногда такой порядок счета необходимо изменить — не выполнять, например, какую-то часть операторов, а выполнять другую или выполнять выделенную группу операторов несколько раз. Такая возможность программирования в среде SMath предусмотрена.

7. В пакете SMath предусмотрена возможность расширения списка доступных функций за счет подключения плагинов (дополнений).

Помимо вышеперечисленного, немаловажным фактором с точки зрения решения обрисованных в статье проблем является то, что SMath — не обучающая, а профессиональная программа научных расчетов. Это даёт возможность продемонстрировать альтернативные методы решения учебных задач, приближенные к реальным инженерным расчетам, что позволяет школьникам попробовать себя в научно-исследовательской деятельности.

Отметим также наличие готового «Руководства пользователя математической про-

граммы SMath Studio» [13], доступного как для учителя, так и для учащихся.

Все вышеперечисленное может сделать компьютерный пакет SMath ценным подспорьем учителя на уроках математики.

1. Использование математического пакета SMath для простейших вычислений

Одним из базовых навыков, развиваемых на школьных уроках математики, является вычислительный навык. Его оттачивание обычно достигается путём решения многочисленных примеров, содержащих большое число арифметических действий с простыми и десятичными дробями, возведение в степень и т.п. [14]. В большинстве своем школьники неохотно выполняют эту рутинную работу, и зачастую, получив на выходе неверный ответ, даже не пытаются найти ошибку в предыдущих действиях. Чтобы стимулировать школьников к выполнению таких заданий и, в частности, к поиску ошибки в своих вычислениях (что само по себе является важным навыком исследовательской работы), предлагается, например, следующая методика использования пакета SMath на уроке.

В заключительной части урока учитель выделяет время на самостоятельное решение школьниками индивидуально-вычислительного примера обычным способом в тетради. Решив пример и зафиксировав у учителя свой ответ, ученик получает разрешение проверить в оставшееся время решение в программе SMath, как показано на рис. 3. Если первоначальное вычисление примера показало, что ответ неверен, ученик может перепроверить все действия с помощью программы SMath (рис. 3), найти свою ошибку, отметить ее в тетради и исправить все последующие действия. В таком случае учитель может не снижать оценку за выполненное задание.

Рис. 3 наглядно демонстрирует, что пакет SMath в данной ситуации не является простой заменой калькулятора. Он, например, позволяет работать с простыми дробями, в том числе, и смешанными числами (см. рис. 4).

Конечно, это может быть подсказкой для школьника, однако учащемуся самому придется понять, в виде какой дроби необходимо представить ответ в каждом действии, так же как и определить сам порядок действий в примере. Кроме того, если в примере встречается бесконечная периодическая десятичная дробь, то пакет SMath не позволяет записать ее в общепринятом математическом виде (например, $0,(31)$), так что с задачей представления такой дроби в виде обыкновенной ученику также придется справиться самостоятельно. По большому счету пакет SMath только позволяет узнать правильный ответ, и полностью переложить свою работу на компьютер учащимся не удастся.

Возможен вариант, когда школьники могут попросить учителя воспользоваться пакетом SMath, еще не получив окончательный ответ примера

$$\frac{(7 - 6,35)}{6,5} + 9,9 = 20$$

$$\frac{1,2}{36} + \frac{1,2}{0,25} - 1 \frac{5}{16} = 20$$

$$7 \frac{1}{24}$$

Пошаговое вычисление числителя дроби

Пошаговое вычисление знаменателя дроби

1) $7 - 6,35 = 0,65$

2) $\frac{0,65}{6,5} = 0,1$

3) $0,1 + 9,9 = 10$

4) $1,2 = \frac{6}{5}$

5) $\frac{1}{36} + 4 = \frac{145}{36}$

6) $\frac{6}{5} \cdot \frac{145}{36} = 4 \frac{5}{6}$

7) $4 \frac{5}{6} - 1 \frac{5}{16} = 3 \frac{25}{48}$

8) $3 \frac{25}{48} = \frac{169}{48}$

9) $\frac{169}{48} = \frac{169}{24}$

10) $\frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$

Деление числителя на знаменатель

Рис. 3. Решение примера с дробями разного вида
Fig. 3. Solving an example with fractions of different kinds

а)

5) $\frac{1}{36} + 4 = \frac{145}{36}$

6) $\frac{6}{5} \cdot \frac{145}{36} = 4 \frac{5}{6}$

б)

5) $\frac{1}{36} + 4 = \frac{145}{36}$

6) $\frac{6}{5} \cdot \frac{145}{36} = 4 \frac{5}{6}$

Вырезать Ctrl+X

Копировать Ctrl+C

Вставить Ctrl+V

Удалить Del

Выделить всё Ctrl+A

☒ Отображать входные данные

Переключить точку останова CTRL+F8

Отображать описание

Запретить вычисление

Без учёта единиц измерения

Оптимизация

Точность ответа

Экспоненциальный порог

Вид ответа (дроби)

Округление

Десятичные

Обыкновенные

Авто

Умолчания

☒ Использовать смешанные числа

Рис. 4. Представление дробей в SMath: (а) – неправильные дроби, (б) – дроби с выделенной целой частью

Fig. 4. Representation of fractions in SMath: (a) – irregular fractions, (b) – fractions with the whole part highlighted

и столкнувшись с затруднением. Однако в этом случае оценка за самостоятельную работу будет заведомо снижена на балл или на два балла, если ученик сразу решил прибегнуть к помощи компьютера.

На наш взгляд, описанный сценарий использования SMath мотивирует как сильных учеников, которые могут не опасаться допустить досадную ошибку (так как успеют проверить решение в SMath), так и слабых, которые получают шанс получить удовлетворительную оценку собственными силами (пусть и с помощью компьютера), а не путем списывания и подсказок.

Отметим также, что набор выражений с арифметическими действиями в рабочем поле SMath не составит сложности для учащихся и потребует минимального времени для освоения с помощью учителя или самостоятельно, опираясь на «Руководство пользователя» [13]. Таким образом, вполне можно применять SMath на начальном этапе изучения простых и десятичных дробей, где еще необходимо отрабатывать навыки поиска наименьшего общего кратного и приведения к общему знаменателю. На рис. 5 приведен несложный вычислительный пример с простыми и десятичными дробями. Приведенную на рис. 5 последовательность действий с дробями школьникам предлагается записать в SMath самим, и, в случае правильного решения, прийти к тождеству с первоначально известным ответом, тем самым проверив себя.

Отметим, что по совету учителя учащиеся могут установить дома пакет SMath и использовать его при выполнении домашних заданий. Учитель даже может поощрять школьников, если они предоставят файлы или распечатки, подтверждающие факт использования программы при подготовке домашней работы. На

$$2, 2 + \left(-4 \frac{2}{3}\right) + \left(-1 \frac{11}{15}\right) = -4, 2$$

- 1) $2 \frac{2}{10} + \left(-4 \frac{2}{3}\right) + \left(-1 \frac{11}{15}\right)$
- 2) $(2 - 4 - 1) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - \frac{11}{15}\right)$
- 3) $-3 + \left(\frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{11}{15}\right)$
- 4) $-3 + \left(\frac{3}{15} - \frac{10}{15} - \frac{11}{15}\right)$
- 5) $-3 + \left(\frac{3 - 10 - 11}{15}\right)$
- 6) $-3 + \left(\frac{-18}{15}\right)$
- 7) $\frac{-18}{15} = -1 \frac{1}{5}$
- 8) $-3 + \left(-1 \frac{1}{5}\right)$
- 9) $-4 \frac{1}{5} = -4, 2$

Рис. 5. Подробное обучающее решение простого примера с дробями

Fig. 5. Detailed tutorial solution of a simple example with fractions

$$\begin{aligned}
 (x + 2)^2 &= \frac{x}{2} + 1; \\
 2(x + 2)^2 &= x + 2; \\
 2(x + 2) &= 1, x = -2; \\
 x &= -1.5, x = -2.
 \end{aligned}$$

Рис. 6. Решение квадратного уравнения, сводящегося к линейному

Fig. 6. Solving a quadratic equation reduced to a linear equation

наш взгляд, такое использование математического пакета SMath побудит учеников к самостоятельному выполнению задания вместо переписывания готовых ответов с Интернет-ресурсов. В особенности, это касается слабоуспевающих школьников, для которых важно создать ситуацию успеха, дать возможность почувствовать уверенность в своих силах и мотивировать тем самым к обучению.

2. Использование математического пакета SMath для решения уравнений и построения графиков функций

Решение уравнений и построение графиков функций являются краеугольными темами в школьной математике. Использование SMath может стать существенным подспорьем учителю для визуализации и более осознанного восприятия учащимися этого материала. Приведем несколько наиболее наглядных примеров.

2.1. Рассмотрим квадратное уравнение, сводящееся к линейному, в процессе решения которого учащиеся зачастую «теряют» один корень [15] (рис. 6).

Школьникам сначала предлагается решить уравнение без использования компьютера, а затем проверить правильность своего решения с помощью SMath, воспользовавшись оператором решения уравнений *solve* с двумя аргументами, где первым аргументом выступает соответствующий квадратный трехчлен, а вторым — неизвестная переменная (рис. 7). Весьма наглядным в данном случае является построение графиков обеих частей уравнения, которое дает учащимся очевидную визуализацию нахождения корней как точек пересечения графиков (рис. 7).

Подчеркнем еще раз, что для выполнения данных действий в SMath достаточно элементарных навыков работы с программой, и учащийся с любым уровнем подготовки может справиться с подобным

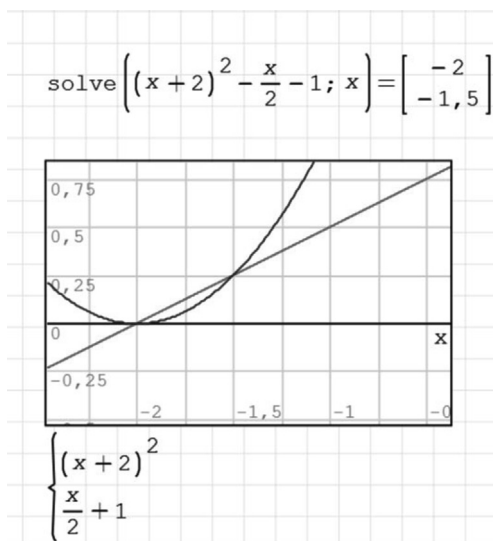


Рис. 7. Решение квадратного уравнения, сводящегося к линейному, в SMATH

Fig. 7. Solving a quadratic equation reduced to a linear equation in SMATH

$$\begin{aligned}
 & |3x - 4| = 4x^2 + 3x + 5 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - 4 = 4x^2 + 3x + 5, \\ -(3x - 4) = 4x^2 + 3x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9 = 0, \\ 4x^2 + 3x + 5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} \text{нет действительных корней,} \\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}.
 \end{aligned}$$

Рис. 8. Решение квадратного уравнения, усложненного модулем

Fig. 8. Solving a quadratic equation complicated by a module

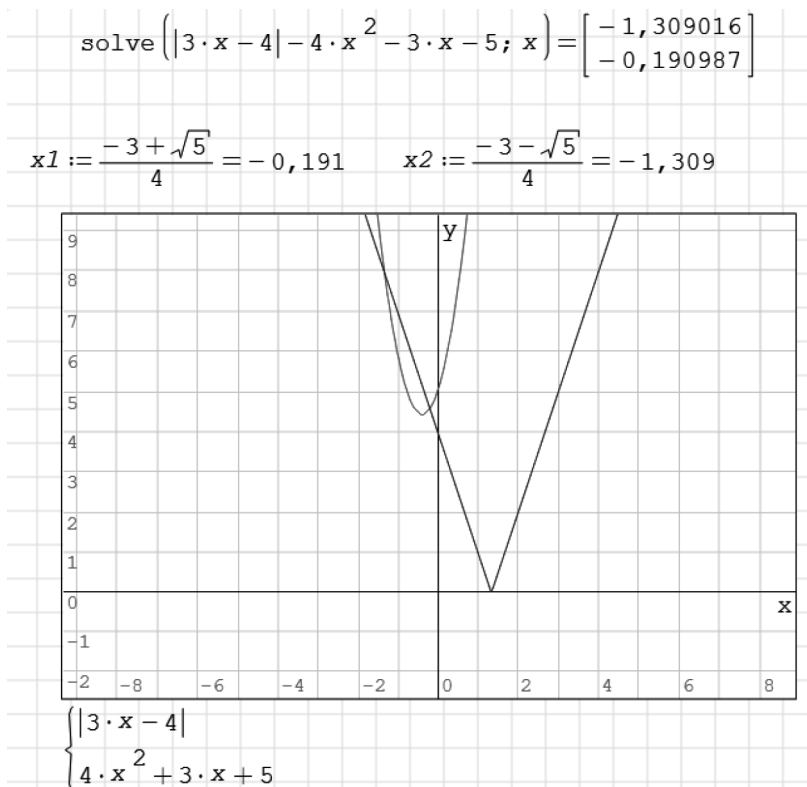


Рис. 9. Решение квадратного уравнения, усложненного модулем, в SMATH

Fig. 9. Solving a quadratic equation complicated by a module in SMATH

заданием. На наш взгляд, это является очень важным обучающим фактором, поскольку возможность самостоятельного решения уравнений с визуализацией существенно повышает когнитивную активность по сравнению с ситуацией пассивного восприятия такого же решения, представленного учителем [16].

2.2. Важным также представляется использование SMATH при решении различных квадратных уравнений, например, усложнённых слагаемым с модулем [17] (рис. 8).

В данном случае, предложив школьникам осуществить пост-проверку своего решения в SMATH, важно проанализировать вместе с ними получившийся графический и численный результат (рис. 9).

Надо предложить учащимся сравнить решения, полученные вручную (аналитически), и численные значения решений, полученные в SMATH, а также попробовать изменить точность решения (рис. 10) и попытаться представить решения в виде обыкновенных дробей. Необходимо сделать вывод, что численные значения не являются точными и не могут быть представлены обыкновенными дробями, поскольку решения – иррациональные числа.

С другой стороны, надо обратить внимание учеников, что полученные с помощью SMATH численные решения, а также их графическое представление дают возможность качественно оценить количество корней и их приближенное значение. Это создает у школьников представление об азах инженерной практики, где оперируют приближенными численными значениями с требуемой точностью и активно пользуются предварительной качественной моделью оценки решения.

На уроках с учащимися классов с углубленным изучением математики, а также

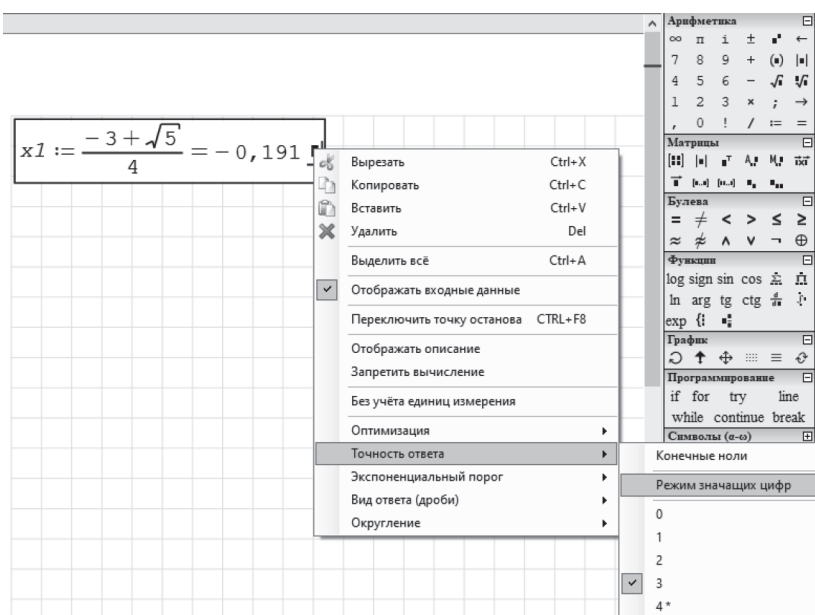


Рис. 10. Выбор точности ответа в SMath

Fig. 10. Selecting the accuracy of the answer in SMath

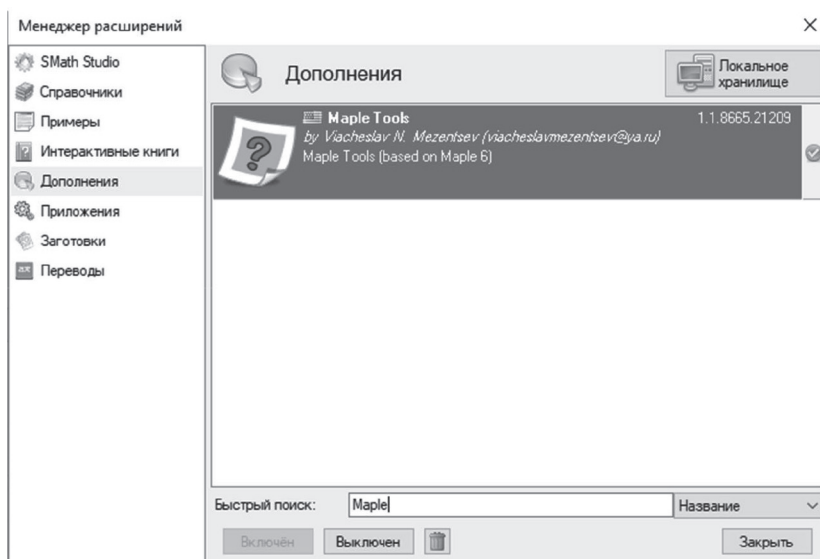


Рис. 11. Окно загрузки дополнения Maple Tools

Fig. 11. Maple Tools add-on download window

Символьное решение

$$\text{maple}\left(\text{solve}\left(\left|3 \cdot x - 4\right| - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 5; x\right)\right) = \left[\begin{array}{c} -\frac{3 + \sqrt{5}}{4} \\ -\frac{3 - \sqrt{5}}{4} \end{array} \right]$$

Численное решение

$$\text{maple}\left(\text{solve}\left(\left|3 \cdot x - 4\right| - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 5; x\right)\right) = \left[\begin{array}{c} -1,309 \\ -0,191 \end{array} \right]$$

Рис. 12. Символьное решение уравнения в SMath

Fig. 12. Symbolic solution of the equation in SMath

на факультативных занятиях можно продвинуться дальше и рассмотреть возможности SMath для символьного (аналитического) решения уравнений. Для этого необходимо подгрузить дополнение Maple Tools во вкладке *Сервис/Дополнения* (рис. 11).

После этого надо предложить учащимся воспользоваться оператором *maple(solve)*, сохранив синтаксис внутри оператора *solve* прежним. Необходимо акцентировать внимание учеников, что набор оператора *maple(solve)* на рабочем поле завершается не символом «=», а стрелкой символьного вычисления « $\rightarrow$ » во вкладке *Арифметика* в правой части рабочего поля. В результате школьники должны получить решения уравнения в аналитическом виде, то есть так, как они были получены при решении вручную. Если же завершить набор оператора *maple(solve)* символом «=», то учащиеся придут к тому же численному (приближенному) решению, полученному ранее (рис. 12).

2.3. Следующим шагом, знакомящим школьников с началами научной деятельности и, в частности, с численными методами, может быть решение с помощью SMath уравнений, содержащих несколько слагаемых с модулями [17] (рис. 13).

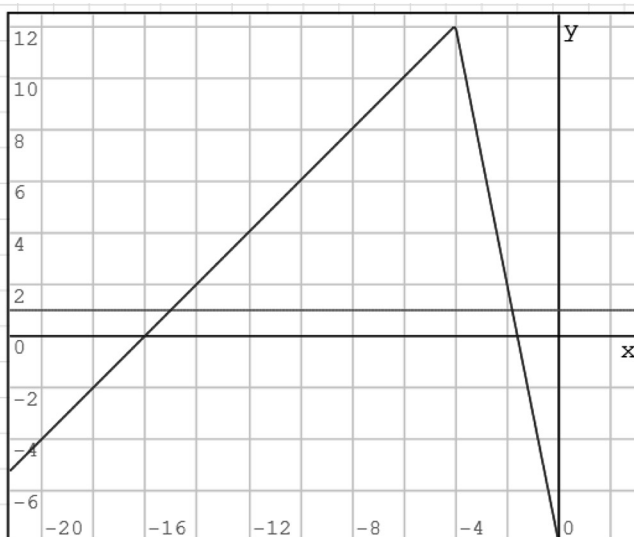
В данном случае сначала надо предложить учащимся решить уравнение вручную обычным способом, то есть путем рассмотрения на промежутках $(-\infty, -4)$, $[-4, 2]$, $(2 + \infty)$, затем с помощью SMath найти графическое решение, качественно определить по получившемуся графику количество корней и их примерное значение и, наконец, сравнить с решениями, получившимися при ручном методе решения.

После того, как этот этап будет выполнен, учащимся предлагается численно решить уравнение в SMath с помощью известного им уже оператора

$$2|x - 2| - 3|x + 4| = 1.$$

Рис. 13. Уравнение с несколькими модулями

Fig. 13. Equation with several modules



$$\begin{cases} 2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| \\ 1 \end{cases}$$

Решение с помощью оператора *solve* с двумя аргументами

$$\text{solve}(2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| - 1; x) = -15$$

Решение с помощью оператора *solve* с четырьмя аргументами

$$\text{solve}(2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| - 1; x; -20; -8) = -15$$

$$\text{solve}(2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| - 1; x; -4; 2) = -1,8$$

$$\text{solve}(2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| - 1; x; -4; 0) = \blacksquare$$

Решение с помощью оператора *roots* с тремя аргументами

$$\text{roots}(2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| - 1; x; -20) = -15$$

$$\text{roots}(2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| - 1; x; -4) = -1,8$$

$$\text{roots}(2 \cdot |x - 2| - 3 \cdot |x + 4| - 1; x; 2) = -15$$

Рис. 14. Решение уравнения с несколькими модулями в SMath

Fig. 14. Solving an equation with several modules in SMath

solve и акцентировать их внимание, что выдается только один корень -15 (рис. 14).

Поэтому в данном случае необходимо воспользоваться расширенным оператором *solve*, имеющим два дополнительных аргумента — начало и конец интервала поиска решения. Школьники должны самостоятельно подобрать такие интервалы решения для оператора *solve*, чтобы получить первый или второй корень. При этом они могут столкнуться

с ситуацией, когда решение в SMath получено не будет (на рис. 14 это решение выделено красной рамкой), хотя на выбранном интервале решение существует, и сделать вывод, что в данном случае оператор *solve* не является лучшим выбором для решения задачи.

Отметим, кстати, следующий факт. То, что компьютерный пакет выдает только один корень уравнения в зависимости от интервала, который задает сам школьник, подво-

дит учеников к правильному восприятию математического пакета как инструмента исследователя, а не «магического ящика» с готовыми ответами.

Опираясь на отрицательный полученный результат с оператором *solve*, учитель предлагает школьникам рассмотреть альтернативный оператор поиска решения *roots*, который имеет три аргумента: само уравнение, неизвестную и начальное приближение (рис. 14). Так же, как и ранее, учащиеся должны подобрать начальные приближения, для которых численное решение сходится к одному или другому корню. При этом ситуации с невозможностью получить численное решение, как для оператора *solve*, не будет, однако выбор начального приближения и в этом случае не является тривиальным (например, для начального приближения 2, получаем корень -15, который отстоит от данного стартового значения гораздо дальше, чем корень -1.8). Можно предложить ученикам провести небольшое научное исследование: как можно точнее определить перебором границы интервалов начальных приближений, при которых численное решение сходится к тому или иному корню (ограничив поиск общим промежутком, например, (-100, 100)). Тем самым учитель подводит учащихся к выводу о важности выбора начального приближения для поиска решения, что само по себе является серьезной проблемой численных методов [18].

Проделанные школьниками исследования по своей сути являются настоящей научной деятельностью, которая может быть методически представлена, например, в формате лабораторной работы.

Так же, как и в предыдущем примере (рис. 12), здесь можно воспользоваться оператором *maple(solve)*, подгрузив плагин Maple Tools. В данном случае этот оператор оказывается

Символьное решение
$\text{maple}(\text{solve}(2 \cdot x - 2 - 3 \cdot x + 4 - 1; x)) = \begin{bmatrix} -\frac{9}{5} \\ -15 \end{bmatrix}$
Численное решение
$\text{maple}(\text{solve}(2 \cdot x - 2 - 3 \cdot x + 4 - 1; x)) = \begin{bmatrix} -1,8 \\ -15 \end{bmatrix}$

Рис. 15. Решение уравнения с несколькими модулями с помощью оператора *maple (solve)*

Fig. 15. Solving an equation with several modules using the *maple (solve)* operator

наиболее подходящим инструментом для решения уравнения, поскольку и численное, и символьное решения с его использованием выдадут сразу оба корня без задания каких-либо начальных приближений и отличаются только формой представления ответа (рис. 15).

Таким образом, рассмотренный пример дает возможность учителю как продемонстрировать разнообразный инструментарий SMath для решения уравнений, так и дать представления о началах численных методов, а также предоставить школьникам возможность для исследовательской работы.

3. Использование математического пакета SMath для задач, приводящих к составлению систем уравнений

Используя навыки, полученные учащимися при решении уравнений с помощью SMath, можно перейти к использованию этого пакета для решения текстовых и геометрических задач. На этом этапе школьникам уже в большей степени понадобится помощь со стороны учителя в процессе использования компьютерного пакета.

3.1. Сначала рассмотрим текстовую задачу, приводящую к составлению системы линейных уравнений [19].

Пять мешков сахара и один мешок пшеничной муки вместе весят 470 кг, а два мешка сахара и пять мешков муки вместе весят 510 кг. Сколько весят мешок сахара и мешок муки?

Для решения данной задачи в SMath школьникам надо иметь элементарное представление о понятии матрицы (вектора). Здесь следует воспользоваться известным уже учащимся оператором *roots*, где в качестве аргументов выступают двумерные векторы, содержащие соответственно систему уравнений и искомые

переменные x (масса мешка сахара), y (масса мешка муки) (рис. 16). Обратим внимание, что, в отличие от одномерного случая (рис. 14), здесь используется оператор *roots* с двумя аргументами, без задания начальных приближений. Ввод двумерного вектора осуществляется с помощью первой кнопки на вкладке *Матрицы* в правой части рабочего поля.

Аналогичным образом можно предложить учащимся решить следующую задачу, имеющую геометрическую интерпретацию (рис. 17) и приводящую к составлению системы нелинейных уравнений [19].

Из одного города вышли одновременно две группы туристов. Одна группа направилась на север, а другая на восток. Спустя 4 ч расстояние между ними было равно 17 км, причём первая группа прошла на 7 км больше. С какой скоростью шла каждая группа?

Решение задачи с помощью SMath представлено на рис. 18.

Здесь надо разъяснить школьникам необходимость сохранения полученных результатов решения системы и присвоения их двумерному

Рис. 16. Решение системы линейных уравнений в SMath

Fig. 16. Solving a system of linear equations in SMath

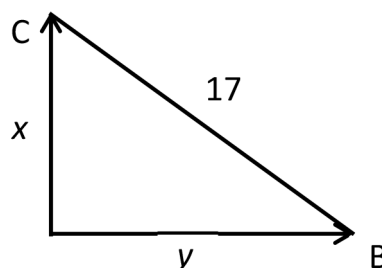


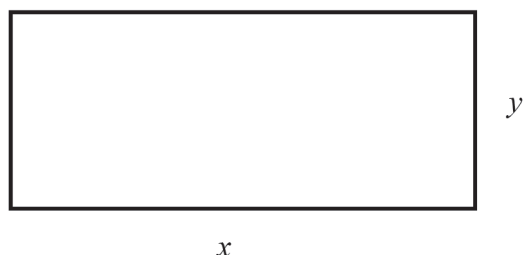
Рис. 17. Геометрическая интерпретация задачи (x, y – расстояния, пройденные первой и второй группой соответственно)

Fig. 17. Geometric interpretation of the problem (x, y – distances traveled by the first and second groups, respectively)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &:= \text{roots} \left(\left[\begin{array}{l} x - y = 7 \\ x^2 + y^2 = 17^2 \end{array} \right]; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} v1 \\ v2 \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} \frac{x}{4} \\ \frac{y}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,75 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 18. Решение системы нелинейных уравнений в SMath

Fig. 18. Solving a system of nonlinear equations in SMath

Рис. 19. Чертеж к задаче (x, y – стороны прямоугольника)Fig. 19. Drawing for the problem (x, y – sides of the rectangle)

Неудачные попытки решения

$$\text{roots} \left(\left[\begin{array}{l} (x+y) \cdot 2 = 42 \\ x \cdot y = 108 \end{array} \right]; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \blacksquare$$

$$\text{roots} \left(\left[\begin{array}{l} (x+y) \cdot 2 = 42 \\ x \cdot y = 108 \end{array} \right]; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \end{bmatrix} \right) = \blacksquare$$

Решения системы

$$\text{roots} \left(\left[\begin{array}{l} (x+y) \cdot 2 = 42 \\ x \cdot y = 108 \end{array} \right]; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{roots} \left(\left[\begin{array}{l} (x+y) \cdot 2 = 42 \\ x \cdot y = 108 \end{array} \right]; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Рис. 20. Решение системы нелинейных уравнений с выбором начальных приближений

Fig. 20. Solving the system of nonlinear equations with the choice of initial approximations

вектору с элементами (x, y). Это требуется для того, чтобы воспользоваться этими результатами для получения искомых скоростей ($v1, v2$).

Однако численное решение в SMath задач, приводящих к составлению систем нелиней-

ных уравнений, иногда может встречать затруднения, связанные с описанной ранее проблемой выбора начальных приближений (рис. 14).

Рассмотрим следующую задачу [19]. Периметр прямоугольника равен 42 см, а пло-

щадь 108 кв. см. Найдите длину и ширину прямоугольника (рис. 19).

В данном случае решение системы с помощью оператора *roots* без выбора начальных приближений не дает результата (рис. 20). Поэтому следует воспользоваться формой оператора *roots* с тремя аргументами, задав третьим аргументом вектор начальных приближений. Однако, как видно из рис. 20, первоначальный выбор начальных приближений оказался неудачным, и решение найдено не было. Ниже на рис. 20 приведены решения системы для подходящих начальных приближений, причем интересно заметить, что если поменять в векторе значения начальных приближений местами, то и корни системы поменяются местами в ответе.

При решении подобных задач с помощью SMath, на наш взгляд, будет методически верно заранее предупредить учащихся о необходимости тщательного подбора начальных приближений для решения системы и дать указания, как это осуществить. В данном случае, например, можно начать подбор, исходя из простых арифметических соображений, что оба корня близки к 10. Для более сложных систем уравнений, где подбор не так очевиден, рекомендуется заранее сообщить учащимся значения начальных приближений, оговорив также, что будет выступать в качестве неизвестных.

3.2. Опираясь на вышеизложенное, рассмотрим решение геометрической задачи с помощью SMath несколькими способами.

Дан треугольник, у которого одна сторона равна 12 см, а один из углов, примыкающий к этой стороне, равен 120° . Сторона, лежащая напротив этого угла, равна 28 см. Найти длину третьей стороны треугольника и высоту, проведенную от заданного угла (рис. 21).

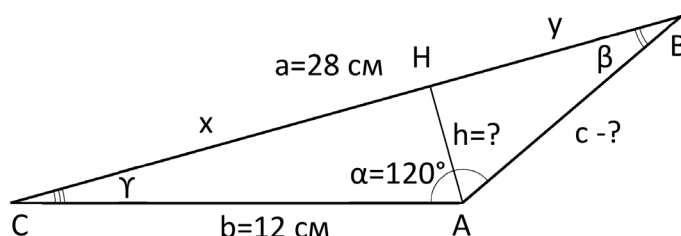


Рис. 21. Чертеж к геометрической задаче

Fig. 21. Drawing for geometric problem

```

a := 28      b := 12      alpha := 120 °
c := solve(a^2 = b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(alpha); c; 0; 50) = 20
p := (a + b + c) / 2 = 30      s := sqrt(p * (p - a) * (p - b) * (p - c)) = 103,9
h := (2 * s) / a = 7,423

```

Рис. 22. Решение геометрической задачи с помощью теоремы косинусов с использованием оператора solve

Fig. 22. Solving a geometric problem with the cosine theorem using the solve operator

```

a := 28      b := 12      alpha := 120 °
maple(solve(a^2 - (b^2 + c^2 - 2 * b * c * cos(alpha)); c)) = [-32 / 20]

```

Рис. 23. Решение геометрической задачи с помощью теоремы косинусов с использованием оператора maple (solve)

Fig. 23. Solving a geometric problem with the cosine theorem using the maple (solve) operator

```

a := 28 см    b := 12 см    alpha := 120 °
[ beta / gamma ] := roots( [ [ sin(alpha) / a = sin(beta) / b ], [ alpha + beta + gamma = 180 ° ] ]; [ beta / gamma ]) = [ 21,79 / 38,21 ] °
h := b * sin(gamma) = 7,4231 см      h := b * sin(gamma) = 0,0742 м
c := h / sin(beta) = 20 см            c := h / sin(beta) = 0,2 м

```

Рис. 24. Решение геометрической задачи с помощью теоремы синусов

Fig. 24. Solving a geometric problem using the sine theorem

Учителю целесообразно предложить школьникам решить данную задачу тремя способами.

Первый способ: составить квадратное уравнение для нахождения третьей стороны c на основе теоремы косинусов, а затем найти высоту h по формуле Герона и основной фор-

муле нахождения площади.

Для реализации этого способа в SMath учащимся надо воспользоваться уже известным им расширенным оператором *solve*, имеющим два дополнительных аргумента — начало и конец интервала поиска решения (рис. 22). Перед составлением уравнения удоб-

но ввести значения данных, известных по условию — сторон a , b и угла α . Обратим внимание на несколько важных моментов:

- для значения угла введена единица измерения «градус» (без единицы измерения величина будет считаться заданной по умолчанию в радианах);

- уравнение в операторе *solve* записано в привычном виде (а не в виде квадратного трехчлена как в рассматриваемых ранее примерах) с использованием булева знака «=» (с вкладки Булева в правой части рабочего поля);

- интервал поиска корней уравнения задан из соображений физического смысла в заведомо широком положительном диапазоне от 0 до 100.

После того, как учащиеся справятся с решением, необходимо обратить их внимание, что найден только один, положительный корень квадратного уравнения. Чтобы убедиться, что второй корень действительно отрицательный и не подходит для решения задачи, можно предложить школьникам воспользоваться оператором *maple(solve)* (из дополнительного плагина Maple Tools), который позволяет найти сразу оба корня (рис. 23).

Второй способ решения заключается в использовании теоремы синусов и теоремы о сумме углов треугольника для нахождения углов β , γ и последующего вычисления высоты h и третьей стороны c из геометрических соотношений прямоугольных треугольников ACH , ABH .

Для реализации этого способа в SMath учащимся надо воспользоваться уже известным им оператором *roots* для решения составленной системы уравнений (рис. 24). Здесь у школьников есть возможность поработать с единицами измерения (см и м) в SMath, добавляя их к численному значению через вкладку Вставка/Единица измерения.

И, наконец, рассмотрим третий способ решения задачи, который рекомендуется для разбора с учащимися старших классов с углубленным изучением математики, поскольку он требует от школьников элементарных знаний линейной алгебры и представляется наиболее сложным с точки зрения реализации в SMath. Данный способ позволяет рассмотреть данную задачу как инженерную и построить с помощью SMath чертеж рассматриваемого треугольника ABC в полном соответствии с пропорциями сторон, найденными в задаче.

Для этого необходимо решить систему из шести уравнений, составленную из простых геометрических соображений и позволяющую найти не только искомые величины h , c , но и углы β , γ , а также значения частей x , y , на которые высота h делит сторону a (рис. 25). Для решения системы используется оператор `roots` с заданным вектором соответствующих начальных значений. Как уже отмечалось ранее, оператор `roots` чувствителен к выбору начальных приближений (в частности, для величины h). Поэтому учителю рекомендуется сообщить начальные приближения учащимся заранее.

Найденные значения позволяют определить координаты точек для рисования замкнутой ломаной, образующей треугольник. Координаты двух вершин треугольника C и A ((x_C, y_C) и (x_A, y_A)) найти несложно, расположив вершину C в начале декартовых координат, а сторону CA — по оси Ox (рис. 26). Координаты третьей вершины B (x_B, y_B) и точки H (x_H, y_H) определяются решением соответствующих систем уравнений (рис. 26). Для учеников можно привести такую аналогию. Системы уравнений на рис. 26 — это математическая запись работы с циркулем, игла которого последовательно помещается в две вершины C и A с известными координатами, и которым

$$\begin{array}{l}
 a := 28 \quad b := 12 \quad \alpha := 120^\circ \\
 \left[\begin{array}{c} c \\ h \\ \beta \\ \gamma \\ x \\ y \end{array} \right] := \text{roots} \left(\left[\begin{array}{c} x^2 + h^2 = b^2 \\ \sin(\gamma) = \frac{h}{b} \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ y^2 + h^2 = c^2 \\ \sin(\beta) = \frac{h}{c} \\ x + y = a \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{c} c \\ h \\ \beta \\ \gamma \\ x \\ y \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{c} 15 \\ 6 \\ 30^\circ \\ 60^\circ \\ 10 \\ 18 \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} 20 \\ 7,423 \\ 0,3803 \\ 0,6669 \\ 9,429 \\ 18,57 \end{array} \right] \\
 h = 7,423 \quad c = 20
 \end{array}$$

Рис. 25. Третий способ решения геометрической задачи

Fig. 25. The third way of solving a geometric problem

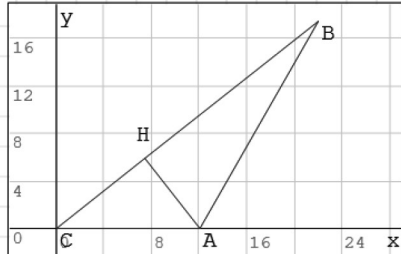
$$\begin{array}{l}
 x_C := 0 \quad y_C := 0 \quad x_A := x_C + b \quad y_A := y_C \\
 \left[\begin{array}{c} x_B \\ y_B \end{array} \right] := \text{roots} \left(\left[\begin{array}{c} (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = a^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = c^2 \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{c} x_B \\ y_B \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{c} 20 \\ 10 \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} 22 \\ 17,32 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{c} x_H \\ y_H \end{array} \right] := \text{roots} \left(\left[\begin{array}{c} (x_H - x_C)^2 + (y_H - y_C)^2 = x^2 \\ (x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 = h^2 \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{c} x_H \\ y_H \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} 7,408 \\ 5,832 \end{array} \right] \\
 \Delta := \left[\begin{array}{cccccc} x_H & x_B & x_A & x_C & x_H & x_A \\ y_H & y_B & y_A & y_C & y_H & y_A \end{array} \right]^T
 \end{array}$$


Рис. 26. Построения чертежа треугольника в SMath

Fig. 26. Drawing a triangle in SMath

прочерчиваются две дуги с известными радиусами (для первой системы это радиусы a и c , для второй — x и h). Пересечение дуг — это и есть искомая третья вершина B или H .

Полученные значения координат вершин A , B , C и точки H помещают в матрицу Δ .

Для удобства представления она введена двумя строками и шестью столбцами, а затем транспонирована (рис. 26).

Тогда треугольник ABC с прочерченной высотой h строится как замкнутая ломаная, координаты вершин которой содержатся в матрице Δ (рис.

26). Для этого используется способ построения графика по точкам, доступный в SMath (в окне двумерного графика в качестве аргумента выступает не функция, аматрица, содержащая соответствующие точки). Дополнительно на рис. 26 обозначены точки A, B, C, H .

Целесообразно обратить внимание учащихся на следующий интересный момент, связанный с теорией графов и часто встречающийся в олимпиадных задачах. В матрице Δ элементы расставлены так, чтобы ломаную линию (граф) можно было изобразить «без отрыва карандаша от бумаги и без дублирования линий», то есть, последовательно соединяя вершины графа, не проходя дважды по одному и тому же ребру. Это возможно, потому что построение ломаной начинается с точки H , которая является нечетной вершиной, где сходится три ребра. Для самостоятельной работы можно предложить школьникам найти еще одну такую вершину в данной задаче и переставить элементы в матрице Δ так, чтобы построение ломаной началось с нее (это вершина A).

4. Использование расширенных графических возможностей пакета SMath для исследования функций

Как демонстрируют многочисленные примеры, рассмотренные выше, построение графических объектов в SMath не требует от учащихся освоения сложных специализированных навыков. Это открывает широкие перспективы для использования учителем пакета SMath на уроках для решения самых разных задач алгебры и геометрии, в частности, для исследования функций, графического решения неравенств и т.п.

Приведем пример использования расширенных графических возможностей пакета SMath на базе квадратного

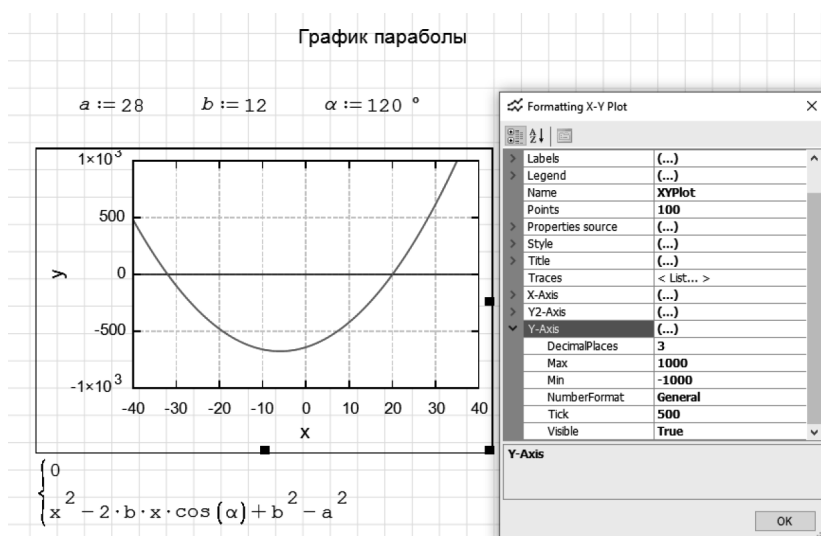


Рис. 27. Графическая интерпретация решения квадратного уравнения с использованием X-Y графика

Fig. 27. Graphical interpretation of solving a quadratic equation using an X-Y graph

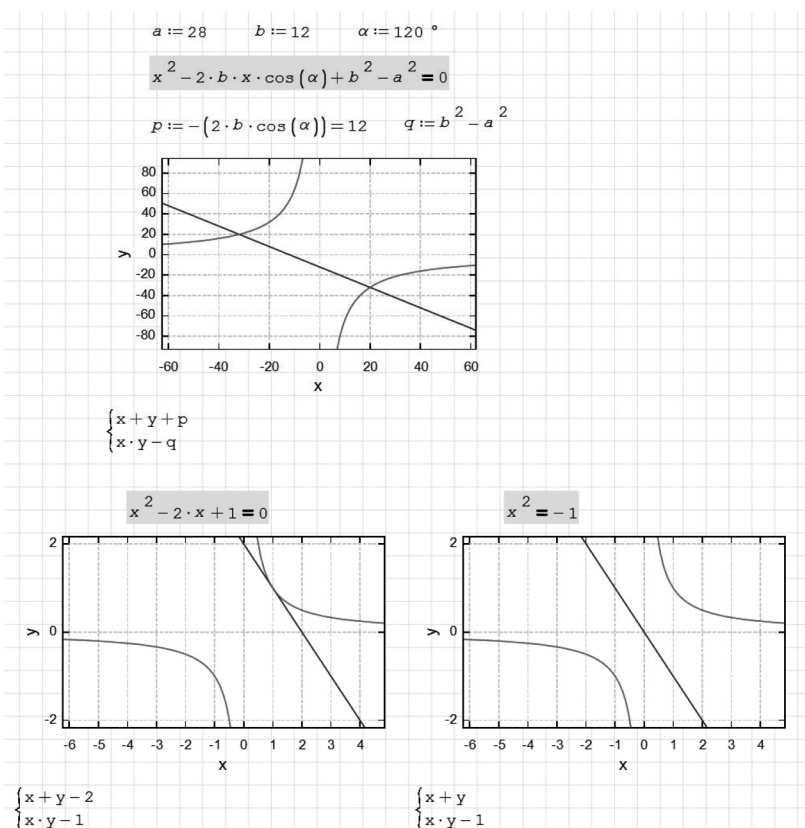


Рис. 28. Геометрическая интерпретация теоремы Виета

Fig. 28. Geometric interpretation of Vieta's theorem

уравнения, рассмотренного в п.3 на рис. 22. Интересно и полезно для школьников рассмотреть графическую интерпретацию решения уравнения, а именно, построить график параболы, определяющей квадратное уравнение. В данном случае обычным

двумерным графиком пользоваться неудобно, поскольку разброс значений координат точек графика по осям OX и OY отличается на порядок и не может быть наглядно представлен в одинаковом масштабе осей. Здесь целесообразно воспользоваться $X-Y$ графиком

(вкладка *Вставка/График*), который позволяет отдельно форматировать каждую ось в требуемом для задачи масштабе (панель *Формат* вызывается кликом правой кнопки мыши) (рис. 27).

Развивая тему визуализации, с продвинутыми учащимися рекомендуется рассмотреть в рамках этой же задачи с квадратным уравнением графическую интерпретацию теоремы Виета (рис. 28). Важно, чтобы школьники идентифицировали вид построенных функций (прямая и гипербола), а также предложили свои варианты квадратных уравнений и построили соответствующие графики, такие что:

- обе ветви гиперболы будут пересекать прямую;
- одна ветвь гиперболы будет касаться прямой;
- ветви гиперболы не будут пересекать прямую.

Таким образом, визуализация в SMath помогает школьникам взглянуть на изученный материал с необычной стороны и тем самым не только лучше понять пройденный материал,

но и побудить к исследовательской и научной деятельности.

В заключение отметим, что описанные выше примеры вычислительных и графических возможностей SMath, а также приведенные соображения методического характера, могут оказать существенную помощь учителю при подготовке к занятиям. Разработка и внедрение разнообразных сценариев применения компьютерного пакета SMath на уроках математики в школе позволят продвинуть преподавание на другой уровень, соответствующий нынешним тенденциям цифровизации в образовании.

Заключение

В статье изложены различные сценарии использования компьютерного пакета SMath на уроках математики в школе, позволяющие стимулировать когнитивные, мотивационные и исследовательские качества учащихся.

Продемонстрирована возможность применения элементарного и в то же время раз-

нообразного инструментария SMath для решения вычислительных примеров с дробями, уравнений и их систем, а также текстовых и геометрических задач. Приведены многочисленные примеры графических возможностей пакета.

Указаны перспективы использования пакета SMath в школьном математическом образовании.

Описанные в статье методические подходы к использованию вычислительных и графических возможностей компьютерного пакета SMath могут оказать как существенную помощь учителю при подготовке к занятиям, так и способствовать более заинтересованному и осознанному восприятию учебного материала школьниками, побудить их к научно-исследовательской деятельности.

Разработка и внедрение разнообразных сценариев применения пакета SMath на уроках математики в школе позволят продвинуть преподавание на другой уровень, соответствующий нынешним тенденциям цифровизации в образовании.

Литература

1. Уваров А.Ю. На пути к цифровой трансформации школы. М.: Образование и информатика, 2018. 120 с.
2. Антонова Д.А., Оспенникова Е.В., Спирин Е.В. Цифровая трансформация системы образования. Проектирование ресурсов для современной цифровой учебной среды как одно из ее основных направлений [Электрон. ресурс] // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия: Информационные компьютерные технологии в образовании. 2018. № 14. С. 5–37. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovaya-transformatsiya-sistemyobrazovaniya-proektirovanie-resursov-dlya-sovremennoy-tsifrovoy-uchebnoysredy-kak-odno-iz-ee> (Дата обращения: 04.12.2024).
3. Панюкова С.В. Цифровые инструменты и сервисы в работе педагога. Учебно-методическое пособие. М.: Издательство «Про-Пресс», 2020. 33 с.
4. Баландин И.А., Гаврилова М.А. Рациональная интеграция средств ИКТ в современный

урок математики на старшей ступени обучения [Электрон. ресурс] // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. Режим доступа: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=11064> (Дата обращения: 04.12.2024).

5. Очков В.Ф. Преподавание математики и математические пакеты [Электрон. ресурс] // Открытое образование. 2013. №2. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/prepodavanie-matematiki-i-matematicheskie-pakety/> (Дата обращения: 04.12.2024).

6. Дербуш М.В., Скарбич С.Н. Инновационные подходы к использованию информационных технологий в процессе обучения математике [Электрон. ресурс] // Непрерывное образование: XXI век. 2020. №2 (30). Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnye-podhody-k-ispolzovaniyu-informatsionnyh-tehnologiy-v-protseesse-obucheniya-matematike> (Дата обращения: 04.12.2024).

7. Петрище С.А. Информационные технологии в преподавании математики в старших классах [Электрон. ресурс] // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. Т.

15. С. 991–995. Режим доступа: <http://e-koncept.ru/2016/96113.htm> (Дата обращения: 04.12.2024).
8. Фунтиков Р.А. Обзор и сравнительный анализ динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор» и «GeoGebra» [Электрон. ресурс] // Молодой ученый. 2018. № 33 (219). С. 8–11. Режим доступа: <https://moluch.ru/archive/219/52350> (Дата обращения: 04.12.2024).
9. Данилкова Е.Р., Подаева Н.Г. К вопросу о развитии способов деятельности школьников с образно пространственными понятиями в 3d-графике системы Geogebra [Электрон. ресурс] // Вопросы педагогики. 2021. №3–1. С. 88–92.
10. Иванов С.Г., Рыжик В.И. Компьютерный инструмент и кризис школьного математического образования [Электрон. ресурс] // Математика в школе. 2024. № 1. С. 49–55.
11. Официальный сайт SMath Studio. [Электрон. ресурс] // Режим доступа: www.smath.com (Дата обращения: 04.12.2024).
12. Очков В.Ф., Орлов К.А., Чудова Ю.В. и др. Информационные технологии в инженерных расчетах: SMath и Python. СПб: Лань, 2023. 212 с.
13. Руководство пользователя программы SMath Studio. [Электрон. ресурс] // Режим доступа: https://ru.smath.com/docs/SMathStudio_user_tutorial.pdf (Дата обращения: 04.12.2024).
14. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др. Алгебра. 7 класс: учебное пособие

для образовательных организаций; углубленный уровень. М.: Просвещение, 2024. 304 с.

15. Каталог заданий по ОГЭ. Математика. Уравнения. [Электрон. ресурс] // Режим доступа: <https://3.shkolkovo.online/catalog/2545?SubjectId=31> (Дата обращения: 04.12.2024).
16. Шестакова М.Н. Использование интерактивных технологии на уроках математики в общеобразовательной школе [Электрон. ресурс] // Наука и практика в образовании: электронный научный журнал. 2022. №5. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-interaktivnyh-tehnologii-na-urokah-matematiki-v-obsheobrazovatelnoy-shkole>
17. Решение уравнений, содержащих модуль. [Электрон. ресурс] // Образовательный портал nsportal.ru. Режим доступа: <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2023/01/18/reshenie-uravneniy-soderzhashchih-modul> (Дата обращения: 04.12.2024).
18. Ochkov V., Vasileva I., Orlov K., Chudova J., Tikhonov A. Visualization in Mathematical Packages When Teaching with Information Technologies // Mathematics. 2022. №10(19). 3413.
19. Решение текстовых задач ОГЭ с помощью систем уравнений. [Электрон. ресурс] // Конструктор сайтов для «Мультуроков». Режим доступа: <https://multiurok.ru/files/rieshieniie-tiekstovoykh-zadach-oge-s-pomoshch-iu-s.html> (Дата обращения: 04.12.2024).

References

1. Uvarov A. Yu. Na puti k tsifrovoy transformatsii shkoly = Towards the digital transformation of the school. Moscow: Education and Informatics; 2018. 120 p. (In Russ.)
2. Antonova D.A., Ospennikova E.V., Spirin E.V. Digital transformation of the education system. Design of resources for a modern digital educational environment as one of its main directions [Internet]. Vestnik Permskogo gosudarstvennogo humanitarno-pedagogicheskogo universiteta. Seriya: Informatsionnyye komp'yuternyye tekhnologii v obrazovanii = Bulletin of the Perm State Humanitarian and Pedagogical University. Series: Information computer technologies in education. 2018; 14: 5–37. Available from: <https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovaya-transformatsiya-sistemyobrazovaniya-proektirovanie-resurov-dlya-sovremennoy-tsifrovoy-uchebnoysredy-kak-odno-iz-ee> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
3. Panyukova S.V. Tsifrovyye instrumenty i servisy v rabote pedagoga. Uchebno-metodicheskoye posobiye = Digital tools and services in the work of a teacher. Study guide. Moscow: Pro-Press Publishing House; 2020. 33 p. (In Russ.)
4. Balandin I.A., Gavrilova M.A. Rational integration of ICT tools into a modern mathematics

- lesson at the senior level of education [Internet]. Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya = Modern problems of science and education. 2013; 6. Available from: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=11064> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
5. Ochkov V.F. Teaching Mathematics and Mathematical Packages [Internet]. Otkrytoye obrazovaniye = Open Education. 2013; 2. Available from: <https://cyberleninka.ru/article/n/prepodavanie-matematiki-i-matematicheskie-pakety/> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
6. Derbush M.V., Skarbich S.N. Innovative approaches to the use of information technologies in the process of teaching mathematics [Internet]. Nepreryvnoye obrazovaniye: XXI vek = Continuous education: XXI century. 2020; 2 (30). Available from: <https://cyberleninka.ru/article/n/innovatsionnye-podhody-k-ispolzovaniyu-informatsionnyh-tehnologiy-v-protssesse-obucheniya-matematike> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
7. Petrishche S.A. Information technologies in teaching mathematics in high school [Internet]. Nauchno-metodicheskii elektronnyy zhurnal «Kontsept» = Scientific and methodological electronic journal «Concept». 2016; 15: 991–995. Available from: <http://e-koncept.ru/2016/96113.htm> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)

8. Funtikov R.A. Review and comparative analysis of dynamic environments «Living Mathematics», «Mathematical Constructor» and «GeoGebra» [Internet]. Molodoy uchenyy = Young scientist. 2018; 33 (219): 8-11. Available from: <https://moluch.ru/archive/219/52350> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
9. Danilkova E.R., Podayeva N.G. On the issue of developing the methods of activity of schoolchildren with figurative-spatial concepts in 3D graphics of the Geogebra system [Internet]. Voprosy pedagogiki = Pedagogics Issues. 2021; 3-1: 88-92. (In Russ.)
10. Ivanov S.G., Ryzhik V.I. Computer tool and the crisis of school mathematical education [Internet]. Matematika v shkole = Mathematics at school. 2024; 1: 49–55. (In Russ.)
11. Official website of SMath Studio. [Internet]. Available from: www.smath.com (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
12. Ochkov V.F., Orlov K.A., Chudova Yu.V. et al. Informatsionnyye tekhnologii v inzhenernykh raschetakh: SMath i Python = Information technologies in engineering calculations: SMath and Python. Saint Petersburg: Doe; 2023. 212 p. (In Russ.)
13. Rukovodstvo pol'zovatelya programmy SMath Studio = User's guide for the SMath Studio program. [Internet]. Available from: https://ru.smath.com/docs/SMathStudio_user_tutorial.pdf (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
14. Makarychev Yu.N., Mindyuk N.G., Neshkov K.I. et al. Algebra. 7 klass: uchebnoye posobiye dlya obrazovatel'nykh organizatsiy; uglublennyy uroven' = Algebra. Grade 7: a teaching aid for educational organizations; advanced level. Moscow: Education; 2024. 304 p. (In Russ.)
15. Katalog zadaniy po OGE. Matematika. Uravneniya = Catalog of tasks for the OGE. Mathematics. Equations. [Internet]. Available from: <https://3.shkolkovo.online/catalog/2545?SubjectId=31> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
16. Shestakova M.N. Using interactive technologies in mathematics lessons in a comprehensive school [Internet]. Nauka i praktika v obrazovanii: elektronnyy nauchnyy zhurnal = Science and practice in education: electronic scientific journal. 2022; 5. Available from: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-interaktivnyh-tehnologii-na-urokah-matematiki-v-obscheobrazovatelnoy-shkole> (In Russ.)
17. Resheniye uravneniy, soderzhashchikh modul' = Solving equations containing a module. [Internet]. Educational portal nsportal.ru. Available from: <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2023/01/18/reshenie-uravneniy-soderzhashchih-modul> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)
18. Ochkov V., Vasileva I., Orlov K., Chudova J., Tikhonov A. Visualization in Mathematical Packages When Teaching with Information Technologies. Mathematics. 2022; 10 (19). 3413.
19. Resheniye tekstovykh zadach OGE s pomoshch'yu sistem uravneniy = Solving OGE text problems using systems of equations. [Internet]. Website builder for «Multurok». Available from: <https://multiurok.ru/files/rieshskii-tiekstovykh-zadach-oge-s-pomoshch-iu-s.html> (Cited: 04.12.2024). (In Russ.)

Сведения об авторах

Валерий Федорович Очков

Д.т.н., профессор, профессор кафедры теоретических основ теплотехники
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия
Эл. почта: ochkovvf@mpei.ru

Инна Евгеньевна Васильева

К.ф.-м.н., доцент кафедры математики
Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, Россия
Эл. почта: ivasad@mail.ru

Юлия Владимировна Шацких

К.т.н., доцент, заведующий кафедрой теоретических основ теплотехники
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия
Эл. почта: ShatskikhYV@mpei.ru

Information about the authors

Valery F. Ochkov

Dr. Sci. (Technical Sciences), Professor, Professor of Department of Theoretical Bases of Heat Engineering
National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia
E-mail: ochkovvf@mpei.ru

Inna E. Vasileva

Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor of Department of Mathematics
Military Educational and Scientific Center of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia
E-mail: ivasad@mail.ru

Yuliya V. Shatskikh

Cand. Sci. (Technical Sciences), Associate Professor, Heat of Department of Theoretical Bases of Heat Engineering
National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia
E-mail: ShatskikhYV@mpei.ru