УДК 378.14
DOI: http://dx.doi.org/10.21686/1818-4243-2026-1-46-56

А.А. Солодов[1], Т.Г. Трембач[2]

[1] Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство). Москва, Россия
[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Оптимальная оценка состояния производственного оборудования на основе анализа рекламаций

Целью исследования *является разработка методов оптимальной по критерию максимального правдоподобия оценки неизвестных неслучайных факторов, влияющих на качество производственного оборудования, а также случайных факторов по критерию минимума среднеквадратической ошибки на основе обработки информации, связанной с поступившими рекламациями с применением математической теории случайных точечных процессов и теории статистических решений.*

Метод исследования *состоит в применении известной гипотезы о распределении времени наработки на отказ технических систем в виде экспоненциального распределения, зависящего от функции интенсивности отказов. Использован тот факт, что соответствующее распределение числа отказов распределено по пуассоновскому закону с этой же функцией интенсивностей отказов. Сделано предположение о том, что функция интенсивностей зависит не только от времени, но и от совокупности неизвестных неслучайных параметров, или от случайных параметров. Подчеркивается, что такие факторы могут отражать обобщенное состояние технической системы, а информация об этом может быть заключена в фактах предъявления рекламаций на продукцию. Поставлена задача оптимальной оценки параметров, от которых зависит функция интенсивности отказов. Поскольку в данной постановке задачи обработке доступны только факты предъявления рекламаций, а также времена их предъявления, то для оптимальной оценки неслучайных параметров применен метод максимума функции правдоподобия, а для случайных – оптимальный фильтр Калмана. Рассмотрена задача оптимальной оценки неизвестных параметров с мультипликативно сепарабельной функции интенсивности отказов, т.е. такой, которая представима в виде произведения отдельно функции времени и функции вектора неизвестных параметров. Показано, что для такой функции задача оптимальной оценки сводится к задаче оценки одного скалярного параметра, масштабирующего функцию времени. Известный алгоритм Калмана для непрерывных параметров применен для случая наблюдаемого процесса в виде числа событий предъявления рекламация и времен их появления. Примеры оценки как неизвестного, так и случайного фактора, приведены для единых реальных данных о пороках ткани, и подтверждают работоспособность алгоритмов и их применимости для простейших оценок состояния производственного оборудования.*

Новыми результатами *исследования являются постановка задачи исследования функции интенсивности отказов, зависящей от совокупности неизвестных неслучайных или случайных параметров, применение методов максимального правдоподобия и алгоритма Калмана для оптимальной оценки этих параметров, а также доказательство утверждения о том, что для сепарабельной функции интенсивностей отказов оптимальная оценка неслучайных параметров сводится к оценке скалярной величины, масштабирующей зависящую от времени функцию интенсивности.*

В заключении *указывается, что примеры оценки факторов, влияющих на функцию интенсивности отказов, подтверждает работоспособность алгоритма и его применимости для простейших оценок состояния производственного оборудования. Отдельной задачей является разработка аналитических выражений для функции интенсивности отказов, зависящей от параметров, а также методов сравнения оценок, полученных различными методами. Решение этих задач позволит разработать методы уточнения состояния производственного оборудования.*

Ключевые слова: *надежность технических систем, функция интенсивности отказов, экспоненциальное распределение, пуассоновский процесс, оценка максимального правдоподобия, алгоритм Калмана.*

Alexander A. Solodov[1], Tatyana G.Trembach[2]

[1] Russian State University A. N. Kosygin, Moscow, Russia
[2] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Optimal Estimation of the Condition of Production Equipment Based on the Analysis of Claims

The purpose of the study *is to develop methods for optimal estimation of unknown non-random factors affecting the quality of production equipment by the criterion of maximum likelihood, as well as random factors by the criterion of minimum standard error based on the processing of information related to claims received using the mathematical theory of random point processes and the theory of statistical solutions.*

The research method *consists in applying the well-known hypothesis about the distribution of operating time for failure of technical systems in the form of an exponential distribution depending on the failure rate function. The fact is used that the corresponding distribution of the number of failures is distributed according to the Poisson law with the same function of failure rates. It is assumed that the intensity function depends not only on time, but also on a set of unknown non-random parameters, or on random parameters. It is emphasized that such factors may reflect the generalized state of the technical system, and information about this may be contained in the facts of product claims. The task of optimal estimation of the parameters on which the failure rate function depends is set. Since in this formulation of the problem, only the facts of filing claims, as well as the times of their presentation, are available for processing, the maximum*

likelihood function method is used for optimal estimation of non-random parameters, and the optimal Kalman filter is used for random parameters. The problem of optimal estimation of unknown parameters from a multiplicatively separable failure rate function, i.e. one that is representable as a product of a separate function of time and a vector function of unknown parameters, is considered. It is shown that for such a function, the optimal estimation problem is reduced to the problem of estimating a single scalar parameter that scales the time function. The well-known Kalman algorithm for continuous parameters is applied to the case of the observed process in the form of the number of claims' events and the time of their occurrence. Examples of evaluation of both unknown and random factors are given for unified real data on tissue defects, and confirm the operability of the algorithms and their applicability for the simplest assessments of the condition of production equipment.
The new results *include the formulation of the problem of studying a failure intensity function that depends on a set of unknown non-random parameters, the application of the maximum likelihood method and Kalman algorithm for optimal estimation of these parameters, and the proof that for a separable failure intensity function, the optimal estimation reduces to the estimation of a scalar quantity that scales the time-dependent intensity function.*
The conclusion *states that examples of assessment of factors affecting the function of the failure rate confirm the operability of the algorithm and its applicability for the simplest assessments of the condition of production equipment. A separate task is to develop analytical expressions for the failure rate function that depends on parameters, as well as methods for comparing estimates obtained by different methods. Solving these tasks will make it possible to develop methods for clarifying the condition of production equipment.*

Keywords: *reliability of technical systems, failure rate function, exponential distribution, Poisson process, maximum likelihood estimation, Kalman algorithm.*

Введение

Определению состояния производственного оборудования посвящена научная область – теория надежности со своей специфической терминологией. Имеется обширная литература, включающая фундаментальные монографии, например, А.М. Половко [1], Б.В. Гнеденко, Ю.К Беляев, А.Д. Соловьёв [2], В.А. Острейковский [3], Р.Барлоу, Ф. Прошан [4], В.А. Каштанов, А.И. Медведев [5], в которых детально рассматриваются основные аспекты теории. Обобщающими работами по теории надежности являются ГОСТы, например, [6] и справочники по надежности, например, Б.Р. Левин [7].

Дальнейшее развитие теории надежности зависит, конечно, от конкретной области применения ее фундаментальных понятий.

Так, в работе А.А. Яблонский [8] рассмотрено функционирование производственных процессов в строительстве как систем массового обслуживания с отказами, В.Д. Райзер [9] рассматривает основные положения вероятностного анализа надежности строительных конструкций.

А.Н. Чеканов [10], В.С. Пряников [11] И.М. Маликов [12] рассматривали специфические методы расчета надежности электронной и радио аппаратуры. При этом для изучения отказов отдельных элементов радиоаппаратуры часто приходится рассматривать физико-химические свойства таких элементов.

Особенно интересной и специфической является область изучения надежности программного обеспечения. Первой монографией на русском языке стала книга Г.Д. Майерса [13]. В настоящее время эту тему развивают многие авторы, например, в работе А.С. Кузнецов, С.В. Ченцова, Р.Ю. Царева [14] предложен комплекс математических моделей и алгоритмов анализа надежности программного обеспечения сложных систем с учетом их многоуровневости и распределенности архитектуры.

Анализ работ по теории надежности позволяет сделать общий вывод о том, что ключевым при разработке приложений в различных областях, является расчет надежности элементов сооружения, аппаратуры или вычислительной архитектуры. При необходимости расчета сложных неоднородных систем, например, в космической технике, используются приближенные методы расчета для отказов определенного типа [15].

Между тем, в практике часто возникает необходимость в грубой, но простой оценке текущей надежности, а также изменений надежности в зависимости от времени. В данной работе предлагается возможный подход к решению этой задачи с использованием только событий о рекламациях, поступающих на изделие.

Общим в разработке теории надежности является предположение об экспоненциальном законе времени T наработки до отказа

$$P(T) = \lambda e^{-\lambda T}, \tag{1}$$

где λ-положительная величина, называемая интенсивностью отказов. В теории надежности величина λ является основной характеристикой, имеющей смысл среднего числа отказов за единицу времени и соответственно, размерность [отказ/время] или [1/время].

Применение соотношения (1) предполагает, что отказ является точечным событием или появлением точки на временной оси и, таким образом, устанавливает связь с математической теорией случайных точечных процессов.

Рассмотрим произвольный интервал времени [s, t), такой, что $t - s = T$ и предположим, что число точек, появившихся к моментам времени t и s равно соответственно N(t) и N(s). Обозначим через $N(T) = N(t) - N(s)$ число точек, появившихся на этом интервале, а через $P[N(T) = n]$ вероятность того, что это число точек окажется равным n. Таким образом, единственной величиной, доступной наблюдению, фиксации, анализу, являются точки, моделирующие отказы. В соответствии с общей теорией статистических оценок далее будем называть процесс появления отказов наблюдаемым процессом.

Хорошо известно, например, В.И. Тихонов, М.А. Миронов [16], Donald L. Snyder, Michael I. Miller [17], Р.Н. Вадзинский [18], что экспоненциальное распределение времени (1) между точками точечного процесса соответствует пуассоновскому закону распределения числа точек n на временной оси:

$$P\left[N(T)=n\right]=\frac{1}{n!}(\lambda T)^{n}\,e^{-\lambda T}, \qquad (2)$$

и обратно, пуассоновское распределение числа точек (2) соответствует экспоненциальному распределению времени между точками (1).

Если теперь интенсивность отказов зависит от времени, то выражение (2) модифицируется очевидным образом:

$$P\left[N(T=t-s)=n\right]=$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right]^{n}\exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda(\tau)d\tau\right). \qquad (3)$$

Работы, посвященные теории надежности, ограничиваются, как правило, соотношениями (2) и (3).

Сделаем ключевое предположение о том, что существует совокупность неизвестных факторов $x_1,\dots,x_n$, которые влияют на работоспособность технических систем и не зависят от времени. Такую совокупность можно представить в виде вектора

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что величина **X** в зависимости от постановки задачи, может рассматриваться как неизвестная, но неслучайная величина, или как случайная.

В данной работе ограничимся только самым общим подходом и будем полагать, что вектор **X** влияет на функцию интенсивности обобщенным образом. Соответственно этому предположению и наблюдаемый процесс, т.е. появление отказов будет зависеть от **X** обобщенным образом. Такие условия возникают, например, при рассмотрении рекламаций потребителей готовой продукции, в которых, как правило, указывается только факт наличия дефекта.

Для учета наличия в постановке задачи вектора X введем в рассмотрение функцию интенсивности отказов $\lambda(t, \mathbf{X})$, которая теперь является известной функцией времени и переменных $x_1,\dots,x_n$.

Появление в описании функции интенсивности фактора **X** приводит к тому, что характер наблюдаемого процесса, т.е. наблюдаемых случайных величин существенно меняется, так как он оказывает влияние на интенсивность появления точек и, следовательно, на работоспособность технических систем. Необходимо еще раз отметить, что компоненты вектора **X** не наблюдаются непосредственно**.**

Предположение о неслучайности факторов, влияющих на интенсивность отказов, определяет и предположение о характере наблюдаемого процесса, т.е. процесса, доступного наблюдению, измерению, обработке и т.п.

Вероятность появление n отказов на протяжении времени t-s при условии, что вектор **X** принял конкретное значение, выражается теперь обобщением соотношения (3):

$$P\left[N(t,s)=n\,|\,\mathbf{X}\right]=$$
$$=\frac{1}{n!}\left[\int_{s}^{t}\lambda(\tau,\mathbf{X})d\tau\right]^{n}\exp\left(-\int_{s}^{t}\lambda(\tau,\mathbf{X})d\tau\right). \qquad (4)$$

Очевидно, что конструирование функции $\lambda(t, \mathbf{X})$ является отдельной задачей и зависит от механизмов появления отказов в различных областях функционирования продукта или изделия.

В выражении (4) вектор **X** является неизвестным неслучайным параметром вероятностного распределения. Традиционным критерием оценки таких параметров является критерий максимального правдоподобия.

Таким образом, постановка задачи в этих предположениях формулируется в следующем виде.

Необходимо на основании анализа наблюдаемых данных, представляющих собой последовательность во времени сообщений о дефектах (рекламациях) сформировать оптимальную по критерию максимального правдоподобия оценку $\mathbf{X}_{opt}$ вектора **X** для любого текущего момента времени t.

Другим, значительно более содержательным может явиться предположение о том, что вектор **X**(t) является случайным процессом, зависящим от времени. Теперь функция интенсивности отказов $\lambda[t,\mathbf{X}(t)]$ также является случайной, а пуассоновский процесс становится процессом с двойной случайностью.

Общая задача оценки случайного процесса на основании наблюдения другого, стохастически связанного с оцениваемым процессом, была изучена Р.Л. Стратоновичем [19] и Ю.Г. Сосулиным [20], которые заложили основы теории нелинейной фильтрации. Они показали, что оптимальной по критерию минимума среднеквадратической ошибки является оценка, представляющая собой условное апостериорное математическое ожидание оцениваемого процесса. Уравнения для апостериорного математического ожидания оказались весьма сложными даже для гауссовских процессов. Если имеется наблюдаемый пуассоновский процесс с двойной случайностью, то искомая оценка принимает вид

$$X_{opt} = M[\lambda[t,\mathbf{X}(t)|N(s),\ 0 \le s < t], \tag{5}$$

где через M обозначена процедура вычисления математического ожидания по всей доступной информации о появлениях точек, включая и времена их появления.

Нетривиальность задачи фильтрации пуассоновского процесса заключается в том, что наблюдаемые данные представляют собой дискретные события, которые происходят в случайные моменты времени, а оценке подлежит непрерывный процесс. Однако, несмотря на эту сложность, разработана общая теория непрерывной оптимальной оценки пуассоновской интенсивности, основанная на методах теории случайных процессов и фильтрации.

Для вычисления оператора (5) необходимо иметь статистические характеристики как случайной функции $\mathbf{X}(t)$, так и процесса $N(s)$, $0 \le s < t$.

В данной работе для простоты ограничимся линейными операторами вида (5). Это означает, что процесс $\mathbf{X}(t)$ определяется линейным дифференциальным уравнением, в правой части которого стоит стандартный винеровский процесс, и функция $\lambda[t,\ (t)]$ является линейной по **X.**

Теория линейной фильтрации для пуассоновских процессов с двойной случайностью впервые была изложена в работе J. Grandell [21] и систематически представлена в работе Donald L. Snyder, Michael I. Miller [17]. Ниже для оценки функции надежности будем пользоваться указанными работами.

Оптимальная оценка неслучайных неизвестных факторов

Для создания математической модели неслучайных факторов, влияющих на состояние производственного оборудования, необходимо задать базовые статистические характеристики доступных наблюдению случайных величин. Для простоты проигнорируем времена появления точек и рассмотрим только их число, появившееся на интервале времени $[t_0,t)$. Очевидно, что тогда единственными наблюдаемыми величинами является количество появившихся к некоторому моменту времени точек.

Поскольку пуассоновский процесс по определению имеет статистически независимые приращения, то это означает, что число точек на неперекрывающихся временных интервалах являются независимыми случайными числами с вероятностями (4) появления точек.

Обозначим число точек, появившихся на первом интервале времени $[t_0,t_1)$ через n_1, на втором интервале $[t_1,t_2)$ через n_2 и т.д. Таким образом, на интервале наблюдения $[t_0,t)$ возникнет совокупность наблюдаемых данных в виде чисел $(n_1, n_2, ..., n_k)$, n_k есть число точек на последнем, текущем интервале времени $[t_k,\ t)$. Вероятность наблюдать совокупность данных $(n_1,n_2,...,n_k)$ при заданном векторе **X,** равна, поэтому, произведению индивидуальных вероятностей (4):

$$P[N(t_{i-1},t_i) = n_i,\ i = 1,\ \dots,\ k|\mathbf{X}] =$$

$$P\left[N\left(t_{i-1},t_1\right)=n_i, i=1,...,k\left|X\right.\right]=$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{n_1!}\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\lambda(\tau,\mathbf{X})d\tau\right]^{n_i}\exp\left(-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\lambda(\tau,\mathbf{X})d\tau\right)\right]. \tag{6}$$

Вероятность (6) содержит всю статистическую информацию, получаемую при известных данных $(n_1,\ n_2,\ ...,\ n_k)$ и может быть использована для формирования статистических оценок. Отметим, что в этой совокупности отсутствует информация о временах появления событий, которая, вообще говоря, может быть использована для улучшения оценок. Ниже приводятся алгоритмы фильтрации пуассоновских процессов с двойной случайностью, использующие всю доступную информацию.

Оценке параметров стохастических процессов посвящена обширная литература, причем до аналитических выражений доводятся, в основном, задачи, ограниченные непрерывными гауссовскими распределениями фигурирующих в них величин. Значительно меньше результатов известно для точечных пуассоновских случайных процессов.

Общая постановка задачи оценки факторов **X** состоит в следующем.

Пусть на интервале времени $[t_0,t)$ пуассоновского процесса с функцией интенсивности $\lambda(t,\mathbf{X})$ наблюдаются данные $(n_1,\ n_2,\ ...,\ n_k)$. Необходимо на основании анализа этих данных определить наилучшим образом вектор **X** и, следовательно, функцию $\lambda(t,\ \mathbf{X})$.

Поскольку имеется вероятности реализации наблюдаемых данных (6), которая в терминах оценок является функцией правдоподобия, то будем применять оценку максимального правдоподобия, которая максимизирует функцию (6).

Прологарифмируем выражение (6), обозначив полученную функцию через $L(\omega)$:

$$L\left(\omega\right)=-\int_{t_0}^{t}\lambda\left(\tau,\mathbf{X}\right)d\tau\right)+\sum_{i=1}^{N(t)}n_i\ln\int_{t_{i-1}}^{t_i}\lambda\left(t,\mathbf{X}\right)dt. \tag{7}$$

Поскольку логарифм является монотонной функцией, то отыскивать оценку максимального правдоподобия можно максимизируя по **X** выражение (7).

Функцию (7) будем в дальнейшем называть функцией правдоподобия. Максимизация функции правдоподобия (7) в аналитическом (конечном) виде возможна только для простейших ситуаций, одна из которых рассмотрена ниже. Тем не менее, сформулированный результат позволяет применять известные численные методы отыскания экстремумов функционалов этого вида. Некоторые вычислительные аспекты максимизации функции правдоподобия (7) для практически интересных случаев рассматриваются, например, в работах M. Aoki [21], J. Markham, D. L. Snyder, and J. R. Cox. [22], J. Ortega and W. Rheinholdt [23].

В качестве простейшего частно случая рассмотрим функцию интенсивности $\lambda(t,\mathbf{X})$ с разделяющимися аргументами, т.е. которую можно представить в виде

$$\lambda(t,\mathbf{X}) = \mu(t)\, g(\mathbf{X}), \tag{8}$$

где функции μ и g являются известными функциями своих аргументов. Такие функции называются мультипликативно-сепарабельными или просто сепарабельными.

Функция правдоподобия (7) с учетом (8) принимает вид

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X}) &= -\int_{t_0}^{T}\mu(t)g(\mathbf{X})d\tau + \sum_{i=1}^{N(T)} n_i \ln[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mu(t)g(\mathbf{X})dt] = \\ &= -g(\mathbf{X})\int_{t_0}^{T}\mu(t)d\tau + \sum_{i=1}^{N(T)} n_i \ln\left[g(\mathbf{X})\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mu(t)dt\right] = \\ &= -g(\mathbf{X})\int_{t_0}^{T}\mu(t)d\tau + N(T)\ln g(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{N(T)} n_i \int_{t_{i-1}}^{t_i}\mu(t)dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Вектор $\mathbf{X}_{мп}$ оптимальных по критерию максимума правдоподобия оценок параметров $\mathbf{X}$ дается, очевидно, как решение уравнения

$$\frac{\partial L(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = 0, \tag{10}$$

причем вектор $\frac{\partial L(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$ определяется обычным образом, как вектор градиента $L(\mathbf{X})$ по отношению к $\mathbf{X}$, т.е. i-тый элемент вектора равен

$$\left(\frac{\partial L(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}\right)_i = \frac{\partial L(\mathbf{X})}{\partial x_i}.$$

Учитывая, что последнее слагаемое в (9) не зависит от $\mathbf{X}$, и, полагая, что производная $g'_x(\mathbf{X}) \neq 0$, из (10) получим следующее соотношение

$$g(\mathbf{X}_{МП}) = \frac{N(T)}{\int_{t_0}^{T}\mu(\tau)d\tau}. \tag{11}$$

Соотношение (11) показывает, что оценка максимального правдоподобия отдельно для составляющих вектора $\mathbf{X}$ получена быть не может для сепарабельных функций вида (7). Это, в свою очередь, означает, что в указанной постановке задачи нет смысла в конструировании сложных зависимостей функции интенсивности от нескольких аргументов.

Это утверждение является основным результатом настоящей работы.

Сделаем замену переменной вида

$$g(\mathbf{X}_{мп}) = X_{мп} \tag{12}$$

где $x_{мп}$ – положительный скалярный аргумент, удовлетворяющий (11).

Очевидно, что такая замена приводит к простому масштабированию функции интенсивности в (8) скалярной неизвестной положительной величиной x:

$$\lambda(t, \mathbf{X}) = \mu(t)X, \tag{13}$$

оценка максимального правдоподобия $x_{мп}$ которой дается соотношением (11)

$$X_{МП} = \frac{N(t)}{\int_{t_0}^{t}\mu(\tau)d\tau}. \tag{14}$$

Поскольку число точек N(t) является случайным, то и оценка (14) тоже является случайной. Очевидно, что математическое ожидание оценки совпадает с X, поэтому оценка является несмещенной.

Если положить в формуле (8) $\mu(t) = 1$, то получим модель неизвестной постоянной функции интенсивности $\lambda(t,\mathbf{X}) = X$ и оценка (14) принимает вид

$$X_{МП} = \frac{N(t)}{t - t_0}, \tag{15}$$

сохраняя перечисленные выше свойства.

Соотношения вида (14) и (15) широко применяются на практике для получения оценок функции интенсивности отказов. В данной работе они получены в качестве примера путем последовательного применения теории оценок максимального правдоподобия для сепарабельных функций интенсивности.

Пример.

В качестве примера применения указанных соотношений применим реальные данные, связанные с производством текстиля. С. В. Соболев в [24] привел результаты исследования различных пороков в 56 кусках ткани миткаль длиной 50 метров каждый. Всего было обнаружено 113 пороков, причем не обнаружено ни одного порока в 13 кусках, один порок в 12 кусках и т.д. Распределение числа кусков ткани с фиксированным числом пороков дается таблицей 1.

Таблица 1 / Table 1

Число пороков	0	1	2	3	4	5	6
Число кусков	13	12	10	10	6	3	2

Ясно, что пороки ткани характеризуют состояние производственного текстильного оборудования.

Для применения оценки максимального правдоподобия сделаем следующие предположения:

– Будем полагать, что число пороков распределено по пуассоновскому закону с переменной функцией интенсивности. Обоснование этого обстоятельства является отдельной задачей, которая может быть решена с применением хи квадрат критерия.

– Далее, положим, что куски ткани предъявлялись потребителю раз в неделю, поэтому размерность функции интенсивности становится равной [порок/неделя] или[1/неделя] и время, фигурирующее в приведенных соотношениях, измеряется, таким образом, в неделях.

– Распределим случайным образом появление у потребителя кусков с определенным числом пороков. Это распределение иллюстрируется на рисунке 1 ординатами, помеченными квадратами и соединенными для наглядности тонкими линиями. Таким образом, на первой неделе было 2 порока в куске, на второй 3, на третьей пороков не было и т.д. Общее число пороков на протяжении 56 недель равно 113.

На рис. 1 представлено выполненное распределение отказов по кускам ткани, а также вычисленная по формуле (15) оптимальная по критерию максимального правдоподобия оценка, обозначенная точками. Отметим, что график поведения оценки функции отказов является дискретным, т.е. представляет собой совокупность точек. Это объясняется тем, что в соответствии с (15) оценка может измениться только при появлении нового события. Понятно, что это является неудобством, поскольку желательно иметь непрерывную оценку функции интенсивности.

С точки зрения теории надежности задача принципиально решена, поскольку рассчитаны интенсивности отказов для конца каждого интервала наблюдения. На основании этого могут быть решены многие задачи теории надежности.

Однако, если ставится задача более подробной оценки текущего состояния оборудования, то необходимо разработать аналитическое выражение для функции интенсивности отказов, зависящей от совокупности факторов, влияющих на конкретные характеристики оборудования. Это, в свою очередь, может потребовать привлечения к рассмотрению физических принципов функционирования и выхода из строя как элементов систем, так и технических систем в целом.

Оптимальная оценка случайных факторов

В рамках дальнейшего анализа предполагается, что функция интенсивности $\lambda[t; X(t)]$ зависит от случайного процесса $X(t)$. Это приводит к тому, что случайный точечный процесс становится процессом с двойной случайностью, что, как уже отмечалось, усложняет задачу его оценки.

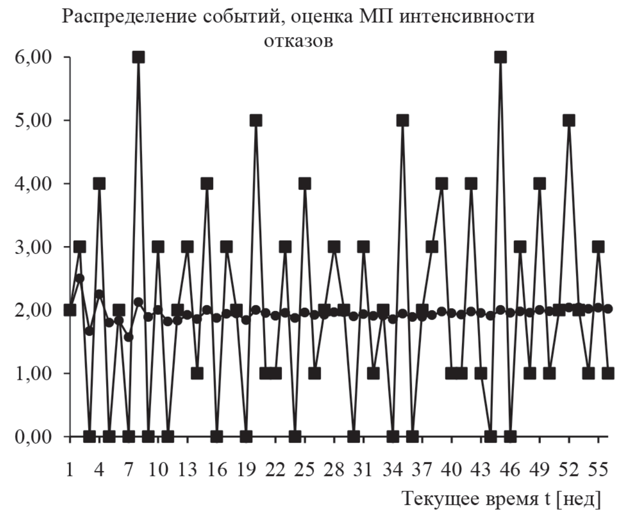

Рис.1. Распределение числа пороков и оценка неизвестного параметра

Fig. 1. Distribution of the number of defects and evaluation of an unknown parameter

Рассмотрим постановку задачи оптимальной линейной фильтрации.

Как уже отмечалось, будем полагать, что процесс, подлежащий оценке, формируется как решение линейного дифференциального уравнения со стандартным винеровским процессом в правой части.

Проблематичным представляется вопрос о способе описания процесса $X(t)$. С одной стороны, он должен описывать характерные черты изменения факторов, влияющих на отказы, а с другой - позволять развить содержательную математическую теорию. В качестве компромисса будем полагать, что процесс $X(t)$ является одномерным и определяется следующей парой линейных соотношений:

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + B(t)d\omega(t),\ X(0) = X_0, \quad (16)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ известные функции времени, $\omega(t)$ – стандартный винеровский процесс, т.е. нормальный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Rt, пропорциональной времени, X_0 – начальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием.

Поскольку уравнение (16) является линейным по X, то и процесс X является гауссовским с нулевым математическим ожиданием.

Простейшая форма уравнения (16), которую будем использовать в дальнейшем, имеет вид

$$dX(t) = -\frac{1}{\tau}X(t)dt + \frac{1}{\tau}d\omega(t), X(0) = X_0. \quad (17)$$

В уравнении (18) τ является постоянной времени и определяет динамические характеристики процесса $X(t)$, а именно, уменьшение τ приводит к увеличению $dX(t)$, приращений процесса $X(t)$.

Выбор модели (17) может быть проиллюстрировано тем обстоятельством, что элементарное инерционное электрическое звено (интегрирующая цепь) на входе которого действует процесс $d\omega(t)$, описывается этим уравнением. Инерционное звено применяется в технических устройствах для приближенного интегрирования входной функции и, поэтому, сглаживания входного воздействия.

В задаче определения интенсивности отказов постоянная τ может характеризовать время реакции системы контроля качества или формирования потока рекламаций во времени.

Выберем описание функции интенсивности в виде простейшего линейного выражения

$$t, X(t)] = \lambda_0[1 + X(t)]. \tag{18}$$

Вычисляя математическое ожидание от обеих частей (17), убедимся, что λ_0 является математическим ожиданием функции $\lambda[t, X(t)]$. Поскольку функция $\lambda[t, X(t)]$ неотрицательна, то при выборе параметров уравнения (17) следует предусмотреть, чтобы с определенной вероятностью выполнялось условие

$$X(t) > -1. \tag{19}$$

Задача состоит в разработке такого алгоритма обработки наблюдаемого процесса $N(t)$ с функцией интенсивности (17), чтобы получить оптимальную по критерию минимума среднеквадратической ошибки оценку $X^*(t)$ процесса $X(t)$.

Последовательное решение сформулированной задачи, содержащееся в ранее упомянутых работах, приводит в частном случае уравнений (17) и (18) к следующей системе связанных дифференциальных уравнений, которые называются фильтром Калмана.

$$dX^*(t) = -\left(\frac{1}{\tau}\right)X^*(t)dt + D(t)\Big[dN(t) - \big(1+\lambda_0 X^*(t)dt\big)\Big],$$

$$X^*(0) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{-2D(t)}{\tau} + \left(\frac{R}{\tau^2}\right) - D(t)^2\lambda_0, D(0) = D_0 \tag{21}$$

$$\lambda^*(t) = \lambda_0[1 + X^*(t)]. \tag{22}$$

В этих уравнениях $dN(t)$ является дифференциалом счетного процесса $N(t)$, который равен единице, если событие произошло на интервале времени dt и нулю в противоположном случае, $D(t)$ является текущей дисперсией ошибки оценки процесса $X(t)$. Уравнение (21) характеризуется особенностью, заключающейся в отсутствии зависимости от наблюдаемого процесса $N(t)$. Все коэффициенты данного уравнения являются априори известными величинами, что позволяет его решить аналитически до начала процедуры фильтрации. Таким образом, функция $D(t)$ может быть определена для любого значения аргумента t независимо от решения уравнения (20), что свидетельствует о независимости качества оценки от характеристик наблюдаемого процесса $N(t)$.

С точки зрения математической классификации, уравнение (21) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, известное как уравнение Риккати. Следует отметить, что аналитическое решение данного уравнения в общем виде не представляется возможным, что обуславливает необходимость применения численных методов для его интегрирования.

Таким образом, задача оптимальной линейной оценки в рассматриваемой постановке сводится к решению системы дифференциальных уравнений (20) и (21). Важно подчеркнуть, что алгоритм Калмана, основанный на данной системе, является оптимальным в классе линейных алгоритмов, что означает невозможность достижения более высокого качества оценки при сохранении линейности.

В задаче оценки состояния производственного оборудования теория линейной фильтрации играет важную роль. Она позволяет непрерывно оценивать функция интенсивности отказов. Это позволяет получить объективную характеристику качества оборудования в реальном непрерывном времени.

Практическое применение фильтра Калмана в области надежности оборудования позволяет непрерывно контролировать качество изделий и оперативно реагировать на изменения параметров процесса.

Очевидно, что для получения теоретического результата необходимо провести вычислительный эксперимент, моделируя поведение наблюдаемого процесса $N(t)$.

Пример.

В качестве примера применения изложенной теории рассмотрим применение фильтра Калмана для тех же реальных данных, которые были использованы при отыскании оценок максимального правдоподобия.

Организация вычислительного эксперимента состоит в следующем:

– Дифференциальные уравнения непрерывного аргумента заменены соответствующими разностными уравнениями, при этом шаг Δt численного интегрирования выбран как 0,1[порок/неделя]. Таким образом, на интервал наблюдения в одну неделю, принятый в предыдущем параграфе, приходится десять отсчетов.

– Пороки ткани распределены по кускам в соответствии с распределением, указанным на рис. 1. Поскольку в работе С.В. Соболева [24] не указаны и моменты выявления пороков, то промоделировано и расположение пороков на оси времени размерности [неделя]. Таким образом, в эксперименте было промоделировано 560 отсчетов. На рис. 1 уже представлено распределение числа дефектов по отрезкам ткани, полученное с помощью метода случайного назначения дефектов. Кроме того, необходимо было случайным образом определить расположение каждого дефекта на оси координат. В ходе эксперимента данные процедуры были тщательно выполнены.

– Выбраны следующие значения параметров, приведенные к единице времени [неделя]: $\tau = 0{,}28$; $\lambda_0 = 2$.

– Для обеспечения выполнения неравенства (19) с вероятностью 0,99 параметр R, фигурирующий в уравнении (16), выбран как $R = \frac{4}{7}\tau$.

– В качестве начального условия D_0 в уравнении (21) выбрано стационарное решение D_{st} уравнения (21) при $\frac{dD(t)}{dt} = 0$, равное $D_{st} = \frac{\sqrt{1+R\lambda_0} - 1}{\tau\lambda_0}$, которое вычисляется по уже выбранным параметрам.

На рис. 2 представлено детальное поведение (фрагмент общей картины) оптимальной оценки функции интенсивности с указанием времени появления каждого порока (рекламации). Вычисление охватывает 60 дискретных отсчетов, распределенных по шести первым отрезкам ткани, на которых зафиксировано 11 событий (пороков, рекламаций), отмеченных на оси аргумента жирными точками. Рисунок наглядно демонстрирует ключевое преимущество предложенного алгоритма, заключающееся в его способности оценивать интенсивность отказов не только в моменты их фактического появления, но и в промежутках между ними. Степень детализации зависит, очевидно, от шага численного интегрирования уравнений. Таким образом, алгоритм обеспечивает работоспособность оценки интенсивности теоретически в непрерывном времени. Это особенно актуально для оценки интенсивности появления неравномерных дефектов, то есть как частых, так и редких.

Понятно, что поскольку график представлен в единицах [порок/отсчет], то для приведения к единицам [порок/неделю] необходимо текущие оценки умножить на 10.

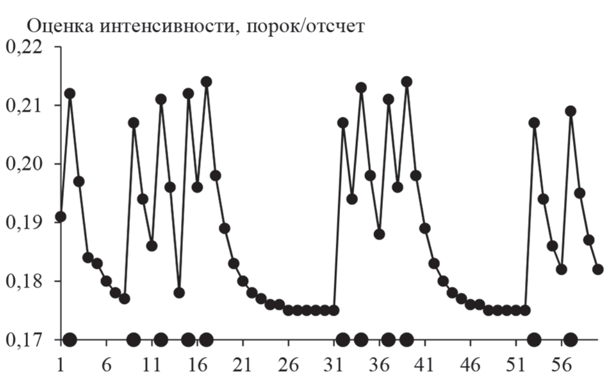

Рис. 2. Детальная оптимальная оценка интенсивности отказов

Fig. 2. Detailed optimal failure rate assessment

На рис.3. представлено поведение оптимальной оценки функции интенсивности отказов на всем промежутке наблюдения длительностью 56 кусков или, что то же самое, недель, приведенной к размерности [дефект/кусок] или [дефект/неделя], в конце анализа каждого куска. Для наглядности на рис.3 воспроизведены числа пороков в куске ткани, совпадающие с таковыми на рис.1. Данная оценка отражает среднюю интенсивность возникновения дефектов во времени, и является случайной функцией, зависящей от конкретной реализации наблюдаемого процесса возникновения дефектов. Наблюдается очевидная корреляция оценки с наблюдаемым числом дефектов в отрезках ткани, что подтверждает работоспособность предложенного метода.

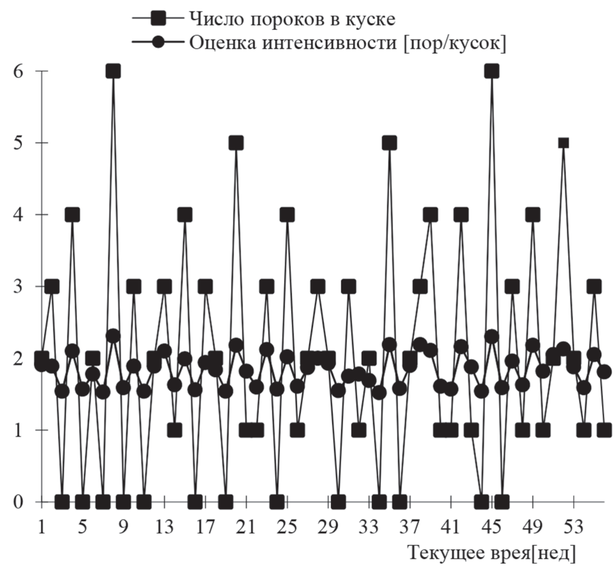

Рис. 3. Оптимальная непрерывная оценка интенсивности отказов

Fig. 3. Optimal continuous failure rate assessment

Применение алгоритмов оптимальной фильтрации представляет собой ключевой аспект в оценке прогнозируемого числа дефектов. В отличие от традиционных методов, основанных на простой формуле (15), алгоритмы фильтрации позволяют осуществлять текущую оценку состояния производственного оборудования, используя ограниченный объем наблюдаемых данных.

Оптимальные оценки, сделанные по критерию максимального правдоподобия и минимуму среднеквадратической ошибки, представленные на рис. 1 и рис. 3 ведут себя подобным образом, отсутствуют выбросы и текущие оценки группируются около значения 2 [порока/неделю]. Это позволяет сформулировать предположение о том, что все образцы (куски) ткани были выработаны на оборудовании, находящемся в одном и том же техническом состоянии.

По какой рассчитываемой величине можно судить о наличии существенных выбросов и что именно считать существенным выбросом-вопрос, требующий дополнительного исследования.

Общий вывод состоит в том, что алгоритм оптимальной фильтрации предоставляет инструмент наилучшей оценки важнейшего параметра, определяющего состояние производственного оборудования, - интенсивности возникновения пороков. Принципиальное значение этого подхода состоит в том, что достигаемое при этом качество фильтрации не может быть улучшено никаким линейным алгоритмом.

Заключение

В работе предложен новый метод учета неизвестных факторов, влияющих на состояние технических систем путем включение таких факторов в число аргументов функции интенсивности отказов. Рассмотрены две модели таких факторов – неслучайные неизвестные факторы и случайные факторы. Соответственно предложены методы оптимальной оценки таких фактов. Для оценки неслучайных факторов применен алгоритм оптимальной по критерию максимума правдоподобия оценки по результатам анализа числа рекламаций, направленных производителю от потребителя. Для оценки случайных факторов сделаны предположения о статистических характеристиках этих факторов и применен алгоритм Калмана, наилучший по выбранному критерию для линейных алгоритмов.

Примеры оценки как неизвестного, так и случайного фактора, приведены для единых реальных данных о пороках ткани, подтверждают работоспособность алгоритмов и их применимость для простейших оценок состояния производственного оборудования.

Отдельной задачей является разработка аналитических выражений для функции интенсивности отказов, зависящей от неизвестных параметров. Решение этой задачи позволит применить предложенный метод для более детальной оценки состояния производственного оборудования.

Другим направлением исследований может быть разработка способов сравнения результатов различных оптимальных оценок функции интенсивности отказов для уточнения состояния производственного оборудования.

Литература

1. Половко А.М. Основы теории надёжности. М.: Наука, 1964. 446 с.
2. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьёв А.Д. Математические методы в теории надёжности. М.: Наука, 1965. 524 с.
3. Острейковский В.А. Теория надёжности. М.: Высшая школа, 2003. 463 с.
4. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М.: Советское радио, 1969. 488 с.
5. Каштанов В.А, Медведев А.И. Теория надежности сложных систем. М.: Физматлит, 2010. 608 с.
6. ГОСТ Р 27.013-2019 (МЭК 62308:2006). Надежность в технике. Методы оценки показателей безотказности. М.: Стандартинформ, 2019.
7. Левин Б.Р. Справочник по надежности / Под ред. Левина Б.Р. М.: Мир, 1969. 339 с.
8. Яблонский А.А. Надежность систем управления в строительстве. М.: Издательство Ассоциации Строительных Вузов, 2018. 180 с.
9. Райзер В.Д. Теория надежности в строительном проектировании. М.: Издательство Ассоциации Строительных Вузов, 1998. 302 с.
10. Чеканов А.Н. Расчеты и обеспечение надежности электронной аппаратуры. М.: Кнорус, 2016. 438 с.
11. Пряников В.С. Прогнозирование отказов полупроводниковых приборов. М.: Энергия, 1978. 112 с.
12. Маликов И. М. Надежность судовой электронной аппаратуры и систем автоматического управления. Ленинград: Судостроение, 1967. 316 с.
13. Майерс Г.Д. Надежность программного обеспечения / Пер. с англ. Ю. Ю. Галимова. М.: Мир, 1980. 360 с.
14. Кузнецов А.С., Ченцов С.В., Царев Р.Ю. Многоэтапный анализ архитектурной надежности и синтез отказоустойчивого программного обеспечения сложных систем. 2013. 142 с.
15. Алатырцев А.А., Алексеев А.И., Байков М.А. и др. Инженерный справочник по космической технике / Под ред. А.В. Солодова. М.: Воениздат, 1977. 430 с.
16. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
17. Donald L. Snyder, Michael I. Miller. Random Point Processes in Time and Space. New York: Second Edition Springer-Verlag, Inc, 1991. 488 с.
18. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.
19. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Издательство Московского университета, 1966. 319 с.
20. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Советское радио, 1978. 320 с.
21. Grandell J. On Stochastic Processes Generated by a Stochastic Intensity Function // Skndinavisk Aktuarietidskrift. 1971. С. 204–240.

22. Aoki M. Introduction to Optimization Techniques. New York: Macmillan, 1971.
23. Markham J., Snyder D. L., Cox J. R. «A Numerical implementation of the Maximum-Likelihood Method of Parameter Estimation for TracerKinetic Data» // J. Mathematical Biosciences. 1976. № 28. С. 275–300.
24. Ortega J., Rheinholdt W. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York: Academic Press, 1970.
25. Соболев С. В. Технология текстильной промышленности // Известия вузов. 1991. С. 8–11.

References

1. Polovko A.M. Osnovy teorii nadozhnosti = Fundamentals of Reliability Theory. Moscow: Science; 1964. 446 p. (In Russ.)
2. Gnedenko B.V., Belyayev Yu.K., Solov'yov A.D. Matematicheskiye metody v teorii nadozhnosti = Mathematical Methods in Reliability Theory. Moscow: Science; 1965. 524 p. (In Russ.)
3. Ostreykovskiy V.A. Teoriya nadozhnosti = Reliability Theory. Moscow: Higher School Publishing House; 2003. 463 p. (In Russ.)
4. Barlou R., Proshan F. Matematicheskaya teoriya nadezhnosti = Mathematical Theory of Reliability. Moscow: Soviet Radio; 1969. 488 p. (In Russ.)
5. Kashtanov V.A, Medvedev A.I. Teoriya nadezhnosti slozhnykh system = Reliability Theory of Complex Systems. Moscow: Fizmatlit; 2010. 608 p. (In Russ.)
6. GOST R 27.013—2019 (MEK 62308:2006). Nadezhnost' v tekhnike. Metody otsenki pokazateley bezotkaznosti = GOST R 27.013—2019 (IEC 62308:2006). Reliability in Engineering. Methods for Assessing Failure-Safe Performance Indicators. Moscow: Standartinform; 2019. (In Russ.)
7. Levin B.R. Spravochnik po nadezhnosti = Reliability Handbook- Ed. Levin B.R. Moscow: Mir; 1969. 339 p. (In Russ.)
8. Yablonskiy A.A. Nadezhnost' sistem upravleniya v stroitel'stve = Reliability of Control Systems in Construction. Moscow: Publishing House of the Association of Construction Universities; 2018. 180 p. (In Russ.)
9. Rayzer V.D. Teoriya nadezhnosti v stroitel'nom proyektirovanii = Reliability Theory in Construction Design. Moscow: Publishing House of the Association of Construction Universities; 1998. 302 p. (In Russ.)
10. Chekanov A.N. Raschety i obespecheniye nadezhnosti elektronnoy apparatury = Calculations and Reliability Assurance of Electronic Equipment. Moscow: Knorus; 2016. 438 p. (In Russ.)
11. Pryanikov V.S. Prognozirovaniye otkazov poluprovodnikovykh priborov = Forecasting Failures of Semiconductor Devices. Moscow: Energia; 1978. 112 p. (In Russ.)
12. Malikov I.M. Nadezhnost' sudovoy elektronnoy apparatury i sistem avtomaticheskogo upravleniya = Reliability of Shipboard Electronic Equipment and Automatic Control Systems. Leningrad: Sudostroenie; 1967. 316 p. (In Russ.)
13. Mayyers G.D. Nadezhnost' programmnogo obespecheniya = Software Reliability / Tr. from Eng. Yu.Yu. Galimova. Moscow: Mir; 1980. 360 p. (In Russ.)
14. Kuznetsov A.S., Chentsov S.V., Tsarev R.Yu. Mnogoetapnyy analiz arkhitekturnoy nadezhnosti i sintez otkazoustoychivogo programmnogo obespecheniya slozhnykh system = Multistage Analysis of Architectural Reliability and Synthesis of Fault-Tolerant Software for Complex Systems. 2013. 142 p. (In Russ.)
15. Alatyrtsev A.A., Alekseyev A.I., Baykov M.A. et al. Inzhenernyy spravochnik po kosmicheskoy tekhnike = Engineering Handbook on Space Technology – Ed. A.V. Solodova. Moscow: Voyenizdat; 1977. 430 p. (In Russ.)
16. Tikhonov V.I., Mironov M.A. Markovskiye protsessy = Markov Processes. Moscow: Soviet Radio; 1977. 488 p. (In Russ.)
17. Donald L. Snyder, Michael I. Miller. Random Point Processes in Time and Space. Second Edition New York: Springer-Verlag, Inc; 1991. 488 p.
18. Vadzinskiy P. H. Cppavochnik po vepoyatnostnym raspredeleniyam = Handbook of Probability Distributions. Saint Petersburg: Science; 2001. 295 p. (In Russ.)
19. Stratonovich R.L. Uslovnyye markovskiye protsessy i ikh primeneniye k teorii optimal'nogo upravleniya = Conditional Markov Processes and Their Application to Optimal Control Theory. Moscow: Moscow University Press; 1966. 319 p. (In Russ.)
20. Sosulin Yu.G. Teoriya obnaruzheniya i otsenivaniya stokhasticheskikh signalov = Theory of Detection and Estimation of Stochastic Signals. Moscow: Soviet Radio; 1978. 320 s. (In Russ.)
21. Grandell J. On Stochastic Processes Generated by a Stochastic Intensity Function. Skndinavisk Aktuarietidskrift. 1971: 204-240.
22. Aoki M. Introduction to Optimization Techniques. New York: Macmillan; 1971.
23. Markham J., Snyder D.L., Cox J.R. «A Numerical implementation of the Maximum-Likelihood Method of Parameter Estimation for TracerKinetic Data» . J. Mathematical Biosciences. 1976; 28: 275-300.
24. Ortega J., Rheinholdt W. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York: Academic Press; 1970.
25. Sobolev S. V. Technology of the Textile Industry. Izvestiya vuzov = Proceedings of Universities. 1991: 8 - 11. (In Russ.)

Сведения об авторах

Александр Александрович Солодов
Д.т.н., профессор, профессор
Российский государственный университет
им. А.Н. Косыгина
Москва, Россия
Эл. почта: aasol@rambler.ru

Татьяна Германовна Трембач
Старший преподаватель кафедры И13
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
«МАИ», Москва, Россия
Эл. почта: tat-trembach@yandex.ru

Information about the authors

Alexander A. Solodov
Dr. Sci. (Engineering), Professor, Professor
Russian State University
named after A.N. Kosygin,
Moscow, Russia.
E-mail: aasol@rambler.ru

Tatiana G. Trembach
Senior Lecturer at the Department of I13
Moscow Aviation Institute (National Research
University) "MAI",
Moscow, Russia
E-mail: tat-trembach@yandex.ru