УДК 51-74
ВАК 05.13.00
РИНЦ 20.01.00

Е.П. Богомолова, В.Ф. Очков, Хейнлоо Мати

Решатели или Великолепная семерка Mathcad

В статье рассмотрены основные математические инструменты Mathcad, позволяющие решать уравнения и их системы аналитическими, численными и графическими методами

Ключевые слова: *Mathcad, уравнение, система уравнений, алгебраическое уравнение, дифференциальное уравнение.*

SOLVERS OR THE MAGNIFICENT SEVEN OF MATHCAD

This article describes the basic mathematical tools of Mathcad that allow solving equations and systems of equations by analytical, numerical and graphical methods.

Keywords: *Mathcad, an equation, system of equations, algebraic equations, differential equation.*

Многие задачи по математике, физике, химии, механике, термодинамике и другим школьным и вузовским дисциплинам сводятся к решению уравнений и систем уравнений. Поэтому полезно будет узнать, какие инструменты для решения такого рода задач есть у пакета Mathcad, очень популярного у школьников, студентов инженеров и ученых. Эти инструменты объединены в группу «Решение уравнений» встроенных функций Mathcad, которые используют различные *численные методы*. В среде Mathcad 15 названия этих методов можно узнать, если на имени некоторых функции, их реализующих, нажать правую кнопку мыши.

В группе «Решение уравнений» традиционно находятся *семь* функций (см. второе название статьи).

Примечание ко второму названию статьи. Есть такой классический вестерн «Великолепная семерка», голливудская адаптация философской драмы Акиры Куросавы «Семь самураев». В американском фильме «главным» в семерке ковбоев, защищавших крестьян от бандитов, был Крис Адамс, которого сыграл Юл Бриннер. Семерка – это некое сакральное число не только в культуре и истории (семь древних мудрецов, семь чудес света, семь дней недели, семь нот в гамме и т.д.), но и в естествознании – семь цветов радуги, семь базовых единиц измерения международной системы СИ и т.д.

Есть еще в среде Mathcad и оператор **solve** для символьного (аналитического) решения задач. Описание этих инструментов будет сделано на несложных школьных "водных" примерах.

Задача 1. Моторная лодка прошла по реке в одну сторону (**L** = 10 km), а потом вернулась в исходную точку, затратив на этот «круиз» 1 час 45 минут (**t**). Спрашивается, какова скорость течения воды в реке (неизвестная **x**), если собственная скорость лодки (**v** – скорость в стоячей воде) равна 12 км/ч (**kph** – мы, следуя современному тренду, будем использовать международное написание единиц измерения).

Раньше подобные «школьные» задачи решались в несколько действий. Но не всякая задача может быть решена пошагово. Поэтому-то люди и придумали алгебру. В древние времена, например, пока не была выведена формула корней квадратного уравнения, не каждое такое уравнение можно было решить пошагово, причем решения были очень хитроумными. Кстати, нашу задачу о моторной лодке тоже сходу нельзя решить пошагово. Читатель, найди, если сможешь, пошаговое решение этой задачи и сравни найденное решение с тем, какое приведено ниже. Первый шаг такого решения может быть таким: 2 * 10 km / 12 kph = 1 hr + 40 min: движение в текучей, а не в стоячей воде увеличило время пути на 5 минут. Многие студенты, подлаживаясь под несколько устарелые требования преподавателей, проводят пошаговые вычисления на компьютере в среде того же пакета Mathcad, и переписывают ответ в расчетную записку, имитируя ручной счет.

Сейчас в связи с широким использованием компьютеров в образовательной сфере принято составлять, а затем решать уравнения, выбирая их подходящие корни. Пойдем и мы по этому пути, но, соста-

Елена Петровна Богомолова,
к.т.н., доцент
Тел.: (495) 362-73-92
Эл. почта: epbogomolova@yandex.ru
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
http://www.mpei.ru

Elena P. Bogomolova,
Ph.D., Associate Professor
Tel.: (495) 362-73-92
E-mail: epbogomolova@yandex.ru
National Research University "Moscow Power Engineering Institute".
http://www.mpei.ru

Валерий Федорович Очков,
д.т.н., профессор
Тел.: (495) 362-71-71
Эл. почта: ochkov@twt.mpei.ac.ru
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
http://www.mpei.ru

Valeriy F. Ochkov,
Doctorate of Technical Sciences, Professor
Tel.: (495) 362-71-71
E-mail: ochkov@twt.mpei.ac.ru
National Research University "Moscow Power Engineering Institute".
http://www.mpei.ru

вив уравнение, попробуем решить его не на бумаге, а на компьютере в среде математической программы Mathcad.

В нашей задаче о моторной лодке время в пути **t** – это суммарное время, затраченное на поездку в одну сторону **L / (v + x)** (условно будем считать, что это движение по течению реки), и в обратную сторону (против течения) **L / (v – x)**. Поэтому наше уравнение будет иметь вид:

(L / (v + x)) + (L / (v – x)) = t

0. solve

Начнем с решения полученного уравнения средствами *символьной математики* Mathcad. Формальное, более правильное и более длинное название символьной математики – *компьютерные аналитические преобразования*, но у нас прижилась калька с английского – *symbolic math*. Это название мы и будем использовать далее.

Если *численная математика* (которая, повторяем, тоже есть в среде Mathcad и составляет его основу) оперирует числами, хранящимися в переменных, то *символьная математика* работает с самими переменными-символами.

На рисунке 1 показано решение уравнения движения моторной лодки по реке с помощью команды **solve** *символьной математики* Mathcad (на этом и некоторых других рисунках будут показаны позиции меню и панели инструментов Mathcad Prime и Mathcad 15 для решения описываемых задач).

Из полученного общего аналитического решения (из вектора с двумя элементами-формулами – см. рис. 1) можно скопировать один элемент, подставить в него исходные значения переменных **L**, **t** и **v** (см. рис. 2) и получить численный ответ – скорость течения воды в реке. Ответ будет выдан в метрах, деленных на секунду (Mathcad

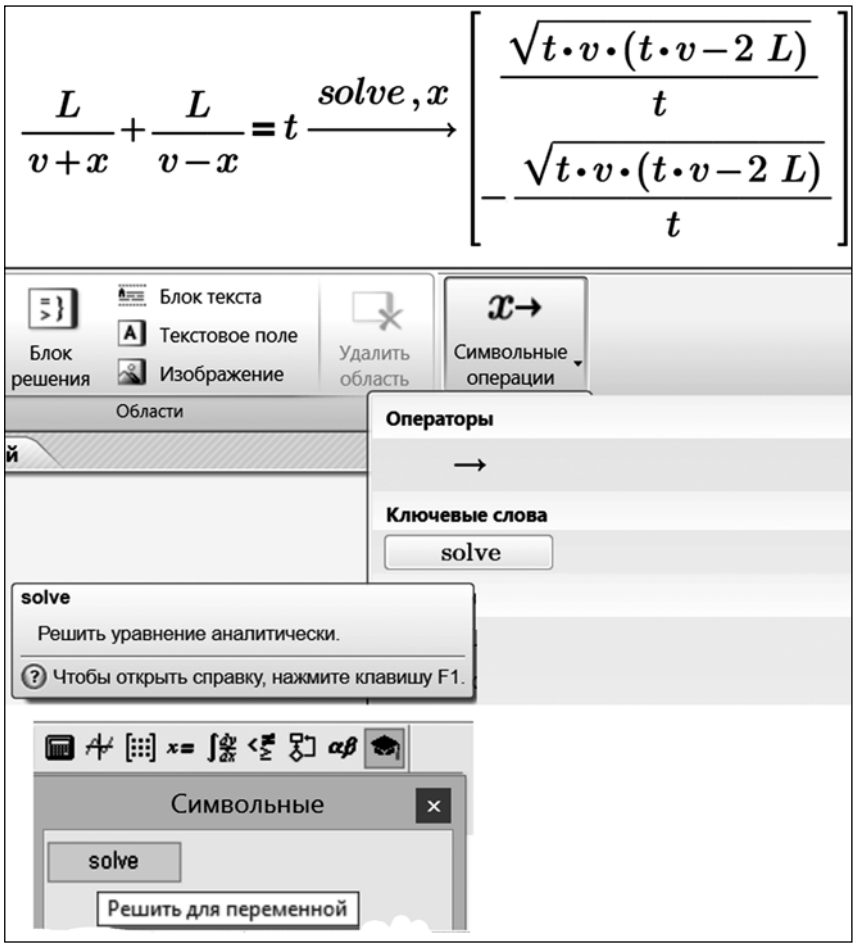
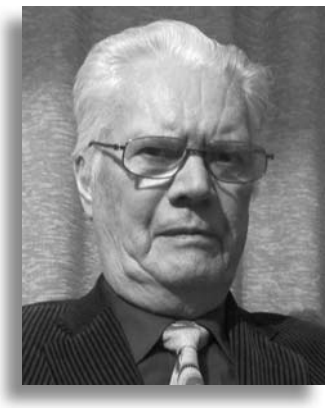


Рис. 1. Аналитическое решение задачи о движении моторной лодки



Хейнлоо Мати,
д.ф.-м.н., профессор
Тел. +372-55-10-512
Эл. почта: Mati.Heinloo@emu.ee
Эстонский университет естественных наук

Mati Heinloo,
Doctorate of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Tel. +372-55-10-512,
E-mail: Mati.Heinloo@emu.ee
Estonian University of Life Sciences

по умолчанию ориентирован на СИ – на международную систему исчислений), и подправлен на более уместные тут километры в час (**kph**). Mathcad – это не просто математический, а физико-математический пакет [1]: переменные Mathcad хранят не числа, а физические величины (длину, время, силу, массу и т.д.), что очень полезно при расчетах в задачах с физическим смыслом. Это существенно ускоряет и упрощает расчеты, позволяет избежать ошибок в них, а также автоматизирует соответствующие преобразования единиц измерения.

$L := 10\ km \qquad t := 1\ hr + 45\ min \qquad v := 12\ kph$

$$\frac{\sqrt{t \cdot v \cdot (t \cdot v - 2\ L)}}{t} = 2.619\ kph$$

Рис. 2. Решение задачи о моторной лодке по найденной на рис. 1 формуле

Спрашивается, для чего же тогда в пакете Mathcad есть и численная математика, если задачу просто и красиво можно решить с помощью символьной математики? Дело в том, что символьная математика, нацеленная на выдачу всех решений в виде формул (абсолютная точность!), часто не справляется с более-менее сложной задачей, и это показано на рис. 3 и 4.

$$\frac{L}{v+x} + \frac{L}{v-x^2} = t \xrightarrow{solve,\,x} ?$$

Полученный результат этой символьной операции слишком длинный для отображения, но он может использоваться в последующих расчетах, если будет присвоен функции или переменной.

Рис. 3. Поиск корня уравнения: очень объемный скрытый ответ

На рисунке 3 в уравнении движения моторной лодки один из иксов был возведен в квадрат. Физический смысл уравнения пропал (складывается скорость с квадратом скорости).

Примечание.

Такими «нефизическими» формулами заполнены все современные учебники и задачники по математике. И это не очень хорошо, вернее, совсем плохо. Хорошо тогда, когда за формулой скрывается какая-нибудь физическая реальность. Такое направление математики условно называют «натуральная математика». Проблема размерностей исчезнет сразу же, как только мы вспомним, что еще во времена Франсуа Виета господствовал принцип однородности, который требовал в подобных случаях умножать икс на некую единицу, получая везде квадраты скорости. Но, как водится, у современных математиков, умножение на единицу не производится, а размерности игнорируются. Вот типичная задача, часто предлагаемая школьникам и студентам для решения в рамках курса математического анализа. Дана функция, определить значения ее аргумента, при которых первая производная функции больше самой функции. Здесь делается упор на технику взятия производной и решения неравенств, но не принимается во внимание тот факт, что сравнение функции и ее первой производной – это равносильно некорректному сравнению пути (длины) и скорости – разных физических величин.

Но сейчас главное не физический смысл уравнения, показанного на рис. 3. Важно то, что пакет Mathcad, решив это чуть усложненное уравнение, не смог вывести на дисплей ответ – настолько тот оказался громоздким. Но это еще полбеды. Настоящая «беда» показана на рис. 4 для еще более усложненного уравнения. Если, например, один икс возвести в квадрат, а другой в куб, то символьная математика Mathcad “поднимет руки вверх” и скажет: “Сдаюсь!”.

$$\frac{L}{v+x^2} + \frac{L}{v-x^3} = t \xrightarrow{solve,\,x} ?$$

Решение не было найдено.

Рис. 4. Поиск корня уравнения: решение не найдено

Если в константы этого «нефизического» уравнения подставить безразмерные численные значения известных величин, то хотя бы один действительный корень у этого уравнения зафиксировать удастся – см. рис. 5, где данная задача решена графически.

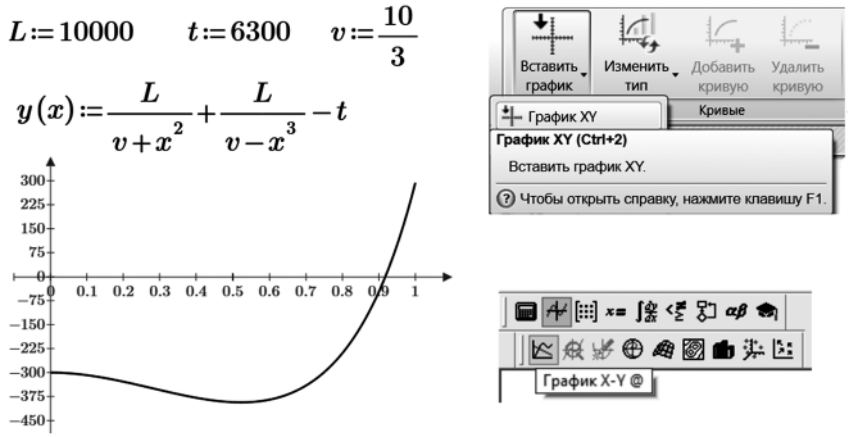


Рис. 5. Графический поиск нуля функции

1. root+root

Из рисунка 5 видно, что у нашего уравнения, превращенного в функцию пользователя переносом переменной **t** в левую часть, есть как минимум один действительный корень в районе числа 0.9. Уточнить численное значение этого корня поможет встроенная в Mathcad функция **root** – см. рис. 6 и 7.

На рисунке 6 показан вызов функции **root** с четырьмя аргументами, а на рис. 7 с двумя. В обоих случаях ответ выведен с тремя знаками после десятичной точки. Но можно вывести и большее число знаков – до 15. В первом случае (рис. 6) нуль функции **y(x)** ищется методом деления пополам на интервале, заданном третьим и четвертым аргументами функции **root** (см. авторскую анимацию этого метода на сайте http://communities.ptc.com/videos/1468). Во втором случае (рис. 7) нуль функции рассчитывается методом секущих с опорой на первое предположение **x := 1** (анимация – http://communities.ptc.com/videos/1466). В среде Mathcad для вычисления нуля функции пользователя фактически есть две одинаковые по имени, но разные по своей сути встроенные функции **root**.

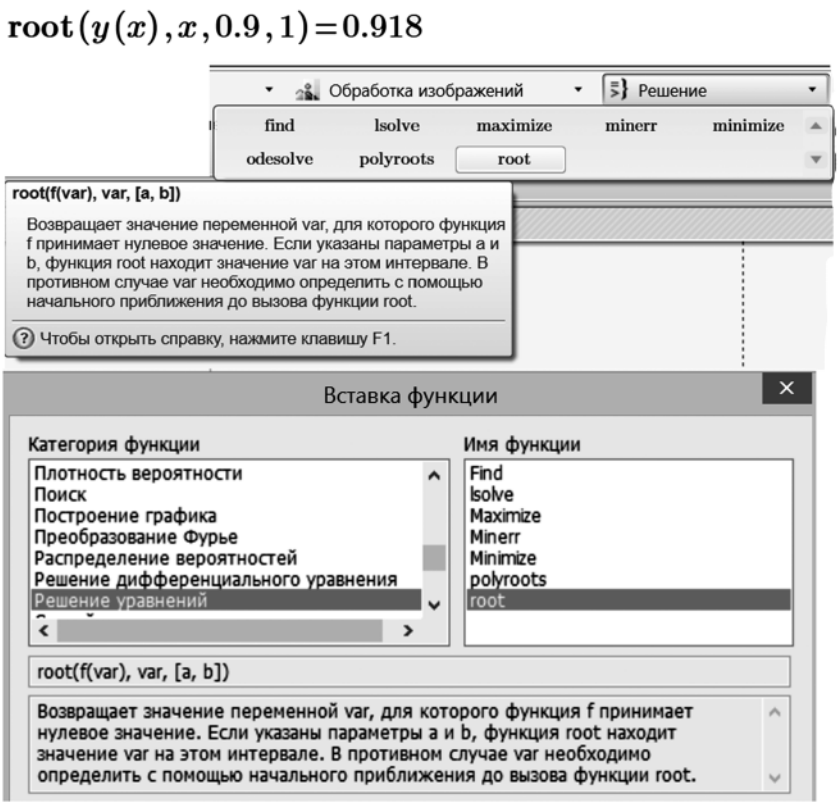


Рис. 6. Работа в среде Mathcad встроенной функции root с четырьмя аргументами

$x := 1 \quad \mathbf{root}(y(x), x) = 0.918$

Рис. 7. Работа в среде Mathcad встроенной функции root с двумя аргументами

На рисунке 8 показана работа функции **root** на довольно простом примере – с функцией пользователя **sin(x)/x**, которая имеет бесконечное число нулей. На отрезке [2, 7] функция **y(x)** имеет два нуля (π и 2π), но четырехаргументная функция **root** ответа не выдала, так как функция **y(x)** имеет одинаковые знаки на концах этого отрезка и функция **root** считает, что там не может быть корней уравнения. На отрезке [1, 17] нулей уже пять, один из которых (9.425) найден четырехаргументной функцией **root**. На концах отрезка [1, 17] функция **y(x)** имеет разные знаки. При первом приближении, равном 0.01, двухаргументная функция **root** выдала не ближайший нуль (3.14), а «очень-очень дальний»: 298.451. Понять эти особенности применения функции **root** можно только после детального рассмотрения численных методов, заложенных в эту функцию – метода деления отрезка пополам и метода секущих.

Ранее мы отметили, что символьная математика Mathcad оперирует не числами, а символами – самими переменными, хранящими или не хранящими числа. Но это не совсем так.

Если какая-либо переменная выражения хранит численное значение, то символьная математика будет работать не с самой переменной (с символом), а с числом, хранящимся в этой переменной. На рисунке 3 была показана осечка символьной математики Mathcad при решении довольно простого уравнения. Но если всем переменным этого уравнения, кроме переменной **x**, задать численные значения, то символьный оператор **solve** успешно справится с задачей – см. рис. 9.

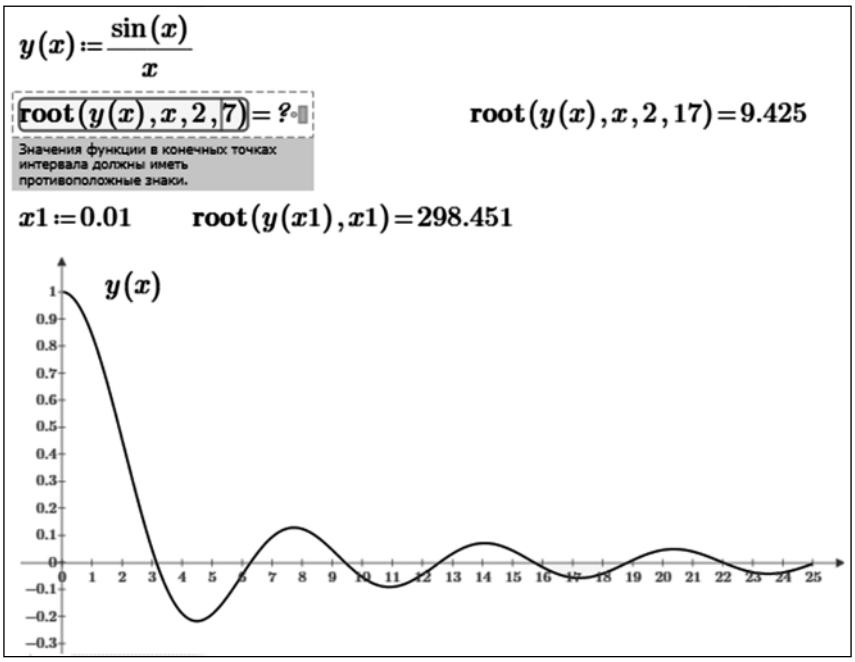


Рис. 8. Особенности работы функции root

$$\frac{L}{v+x^2}+\frac{L}{v-x^3}=t \xrightarrow{solve,x} \begin{bmatrix} 0.91753907432064754652 \\ -0.10072745491075931273-0.5044730777723681i \\ -0.10072745491075931273+0.50447307772368065275i \\ -0.35804208224956446053-1.43206766221807i \\ -0.35804208224956446053+1.43206766221807i \end{bmatrix}$$

Рис. 9. Численный ответ символьного оператора

На рисунке 9 показано, что «символьный» оператор **solve** в отличие от «численной» функции **root** выдал все пять корней уравнения (один действительный и четыре с мнимой частью) без установки интервала (рис. 6) или первого предположения (рис. 7). Кроме того, если численная математика при выводе ответа «на печать», как мы уже отметили, по умолчанию ограничивается тремя знаками после десятичной точки, то символьный оператор **solve** в этом случае выдал численные решения с двадцатью знаками после запятой. При «численном» ответе количество значащих цифр можно увеличить до 15, а при символьном до 250.

Примечание. Лишить переменную ее численного значения для последующих аналитических преобразований можно операторами: **clear$_{sym}$(a)** (Mathcad Prime) или **a := a** (Mathcad 15).

Если наше уравнение с численными константами (см. рис. 9) и дальше усложнять, то на каком-то этапе оператор **solve** не сможет найти корни. Функция же **root** по-прежнему будет выдавать корень, правда, лишь один из многих и с опорой на заданный интервал поиска (рис. 6) или на первое приближение (рис. 7). При этом задавать интервал поиска придется, исходя из уверенности, что корень на этом интервале имеется. Метод секущих же при неправильном первом приближении вообще не выдаст нужного результата. Это такой своеобразный компромисс. Отсюда общее правило: поставленную математическую задачу нужно стараться сначала решить аналитически в общем виде, не придавая переменным конкретных численных значений (рис.1) или придавая отдельным или всем переменным численные значения (рис. 9). Если же ответа найти не получается, то придется переходить к поиску частных решений численными методами, дополняя их анализом графиков.

На рисунке 10 показано использование графика и функции **root** в двух ее вариантах для решения нашей задачи о моторной лодке. Интересный факт. Двухаргументная функция **root** при первом приближении, равном нулю, выдала не ожидаемый положительный, а отрицательный корень. Этот нюанс можно понять, если опять же учесть особенности метода секущих при поиске нулей функции и после построения графика не на отрезке от -3 до 3 км/ч, а на отрезке -13 до 13 км/ч, охватывающем точки разрыва, что мы сделаем ниже. Дело в том, что функция **root** с двумя аргументами работает так. Пользователь задает одну опорную точку поиска (первое *предположение*, но это далеко не всегда первое *приближение* – см. пример на рисунке 8). Далее пакет Mathcad **правее** этой точки на расстоянии **CTOL** (по умолчанию это 0.001 в нашем случае метров, т.е. один миллиметр) фиксирует вторую точку и проводит через две эти точки секущую, почти касательную). Эта секущая где-то пересекает ось X – это будет третьей, очередной точкой итерационного поиска корня. Далее реализуется классический метод секущих. Правая точка разрыва нашей анализируемой функции «перекидывает» поиск в область отрицательных значений. Можно сказать, что в функцию **root** с двумя аргументами заложен гибрид метода Ньютона (касательных) и метода секущих. На авторском сайте http://communities.ptc.com/videos/1411 можно видеть анимацию метода Ньютона для одиночного уравнения, а на сайте http://communities.ptc.com/videos/1472 для системы двух уравнений.

Примечание. Для повышения точности поиска нуля функции с помощью встроенной в Mathcad функции **root** можно не уменьшать значение системной переменной **CTOL** (см. список левее графика на рис 10), а перемножить анализируемую функцию на 10^3, 10^4 и т.д. Выбор точности вычислений – это отдельная задача. С одной стороны, повышенная точность никогда не будет лишней, а с другой стороны, она приводит к замедлению расчетов и срыву их в ряде случаев. Во всем нужна мера!

Уравнение движения моторной лодки, показанное на рис. 1, можно преобразовать в квадратное. К такому приему обычно прибегают

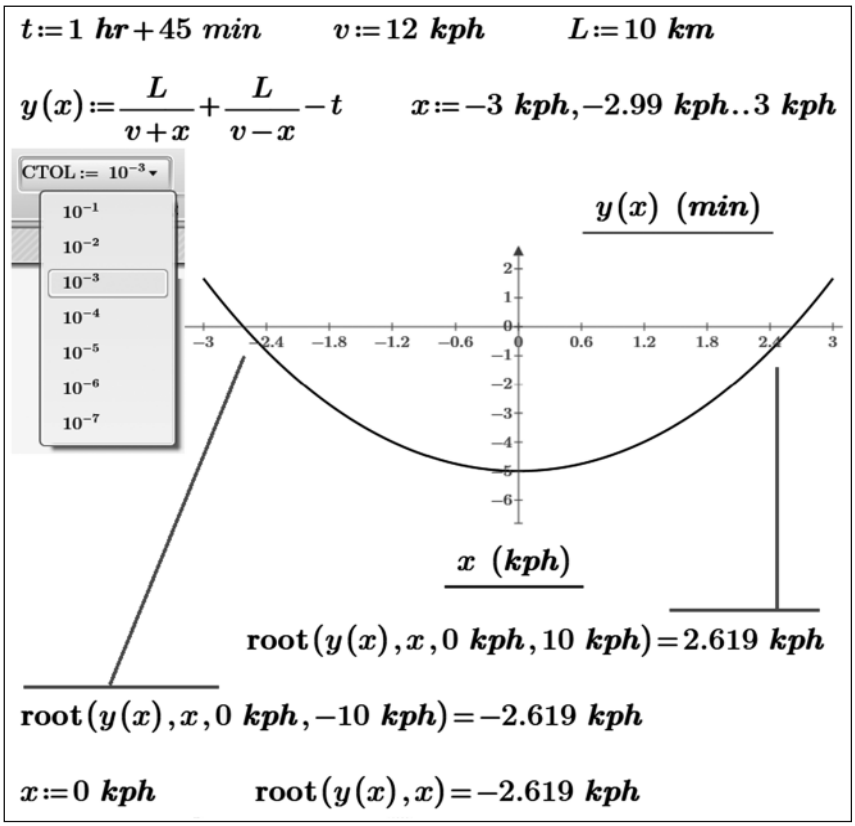


Рис. 10. Графическое и численное (через функцию root) решение задачи о моторной лодке

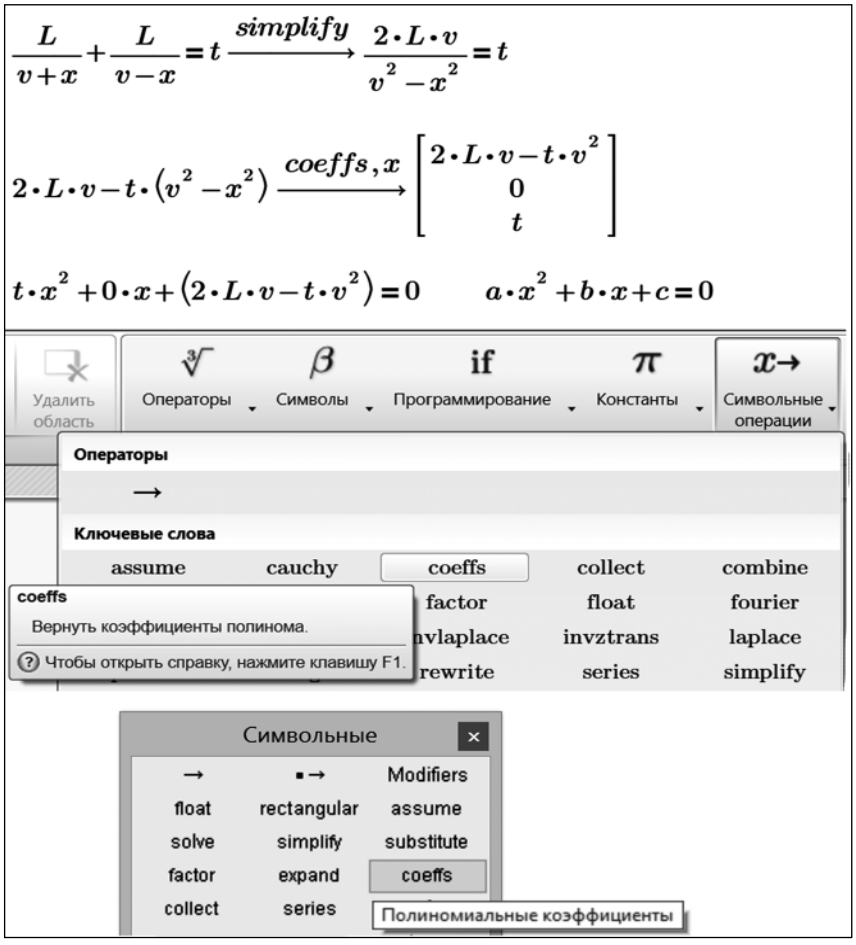


Рис. 11. Определение коэффициентов полинома

в школах, т.к. школьников, как правило, учат решать аналитически только квадратные уравнения. Как такое преобразование можно сделать в среде Mathcad, показано на рис. 11.

Оператор символьной математики **simplify** (упростить) приводит левую часть исходного выражения к общему знаменателю, умножает обе части уравнения на полученный знаменатель и переносит все слагаемые в левую часть уравнения (рис. 11). Таким способом выделяется функция, которая приравнена к нулю. Оператор **coeffs** находит коэффициенты этой функции-полинома (в данном случае квадратного). Это квадратное уравнение можно решить оператором **solve**, но… см. ниже.

Примечание. Квадратичная функция, полученная после преобразования исходного уравнения движения моторной лодки, не эквивалентна исходной функции, а только имеет с ней два одинаковых корня. В этом можно убедиться, взглянув на графики, показанные на рис. 12. Наше исходное уравнение движения моторной лодки имеет разрывы при **x**, равном 12 и минус 12 **kph**. В этих точках лодка не будет перемещаться относительно берега при движения в одну из сторон. Квадратичная же функция таких разрывов, естественно не имеет

2. polyroots

Если выражение представляет собой полином (квадратный, например, см. выше), то можно найти все его нули, использовав еще одну функцию из «великолепной семерки Mathcad» – функцию **polyroots**. Она имеет в качестве аргумента вектор коэффициентов полинома и возвращает его нули (вектор, который на один элемент короче вектора-аргумента), т.е. решение нашей задачи – см. рис. 13.

В нашей задаче о движении моторной лодки полином оказался квадратным и его корни, повторяем, можно было найти через оператор символьной математики **solve** (см. рис. 1). Но в случае полиномов высокой степени оператор **solve**

не сработает. Тут и пригодится численная встроенная функция **polyroots**.

3. Find

Показать работу еще одной функции из «великолепной семерки Mathcad» – функции **Find** – поможет нам еще одна дополнительная моторная лодка.

Задача 2. От двух пристаней на прямолинейном участке реки навстречу друг другу одновременно отходят две моторные лодки. Они встречаются в точке, делящей этот участок реки в золотом соотношении. Найти скорость второй лодки v_2 и скорость течения воды в реке v, если известна скорость первой лодки v_1, расстояние между пристанями L и время t движения лодок до встречи. (Шуточный вариант задачи: от двух станций по одноколейной дороге вышли навстречу друг другу два поезда. И не столкнулись! Почему? Ответ: не судьба!).

Мы в задаче имеем в виду знаменитое «Золотое сечение», т.е. такое деление отрезка на две неравные части, при котором длина меньшей части отрезка так относится к длине большей части, как длина большей части относится к длине всего отрезка (см. рис. 14). Это свойство золотого сечения помнят многие, чего не скажешь о формуле золотого сечения. На сайте http://communities.ptc.com/videos/1521 показана авторская анимация метода золотого сечения при численном поиске на заданном отрезке минимума функции одного аргумента.

Золотое соотношение (сечение) в задачу вставлено неслучайно. Можно поискать в своей памяти или в справочниках (бумажных или интернетовских) формулу золотого сечения. Но можно поступить иначе [2]: написать в среде Mathcad само уравнение золотого сечения применительно к нашей задаче о моторных лодках и решить его аналитически, получив нужную формулу – см. рис. 14.

На рисунке 14 оператор **solve** выдал два решения, из которых нам подходит только второе – 3.82 km. Первое же решение (26.18 km) ле-

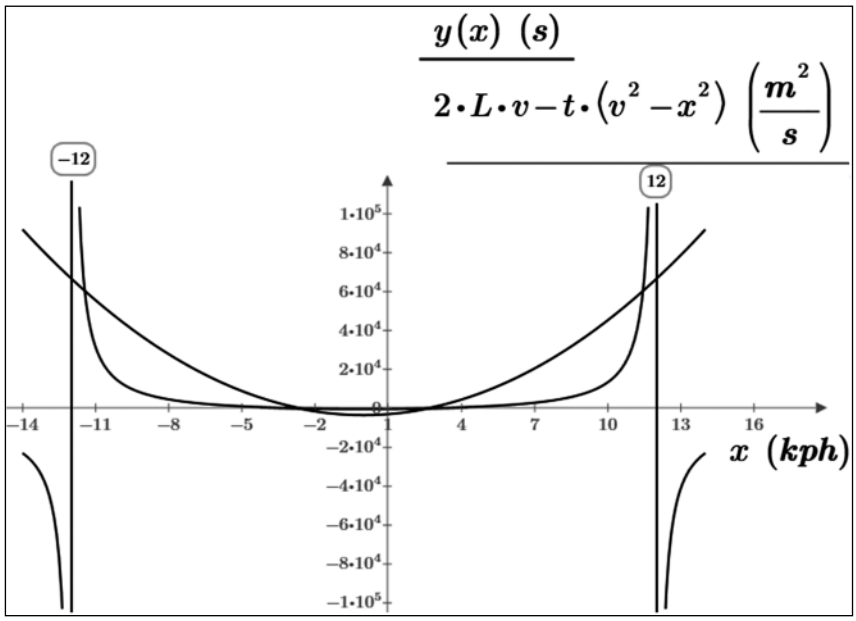


Рис. 12. Исходное и квадратное уравнение движения моторной лодки

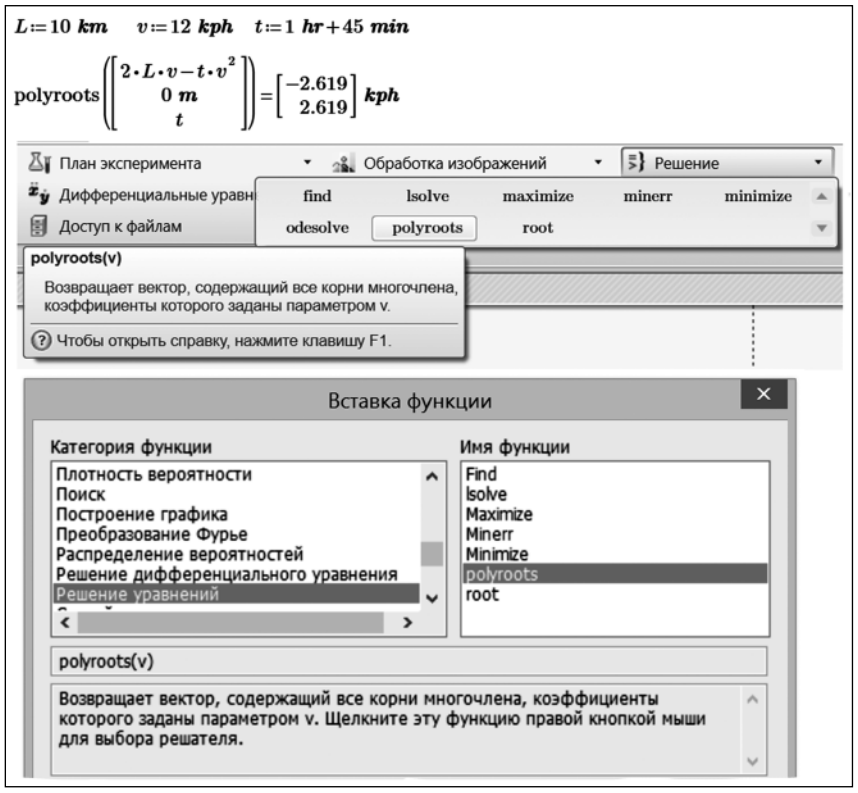


Рис. 13. Поиск нулей полинома в среде Mathcad

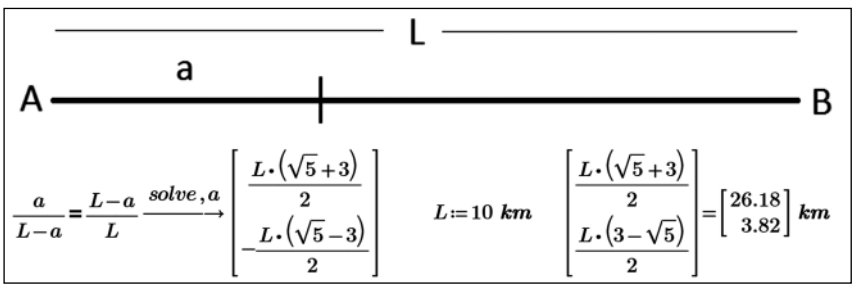


Рис. 14. Решение уравнения золотого сечения в среде Mathcad

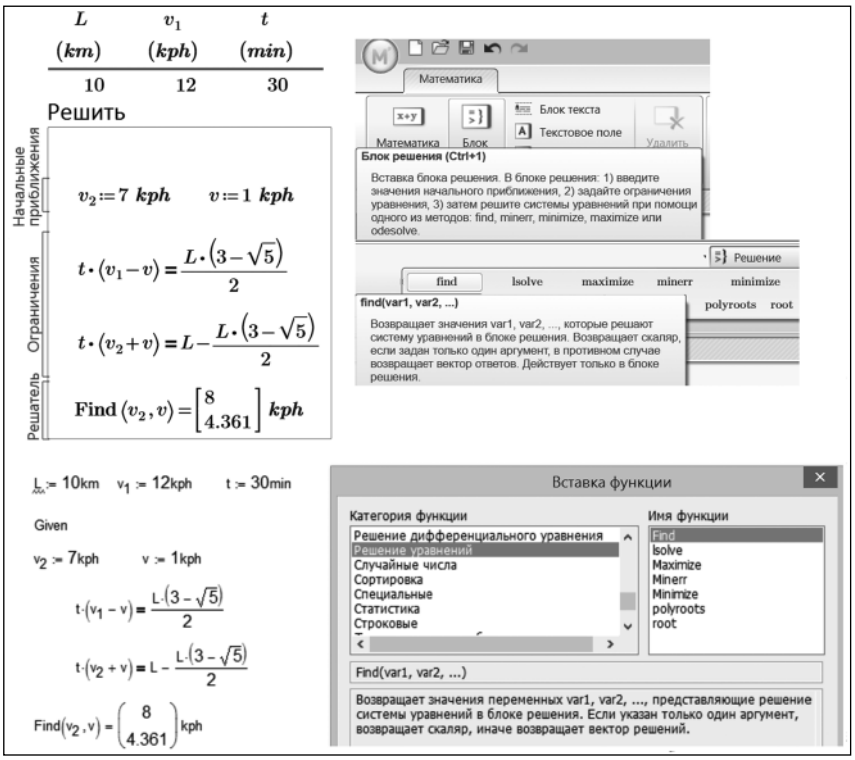


Рис. 15. Решение систем алгебраических уравнений с помощью функции Find

жит вне рассматриваемого отрезка. Символьная математика, повторяем, выдает все ответы, из которых нужно еще уметь выбрать подходящее. Или уметь заставить оператор **solve** выдать нужный ответ.

На рисунке 15 показано решение в среде Mathcad Prime и Mathcad 15 задачи о двух моторных лодках, сводящееся к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными. Решение найдено с помощью функции **Find**, требующей начального приближения к решению.

Встроенная функция **Find** меняет значение своих аргументов, начиная от начального приближения так, чтобы уравнения системы превратились в тождества. Вернее, почти в тождества. Дело в том, что и обе функции **root** (рис. 7 и 9) и функция **Find** (рис. 7) возвращают значения, отличающиеся от точных решений на величину, не превышающую по модулю значения, хранящегося в системной переменной **CTOL**. Ведь что такое корень уравнения?! Корень – это значение переменной, при котором уравнение превращается в тождество. Но при численном (приближенном!) решении найти точный корень не всегда удается. Подстановка приближенного значения корня в уравнение приводит к тому, что правые и левые части уравнения отличаются друг от друга на значение, хранимое в переменной **CTOL**, которое по умолчанию равно 0.001. Это значение можно менять, решая конкретную задачу. На сайте с авторской анимацией http://communities.ptc.com/videos/1472 можно видеть особенности поиска четырех корней системы двух нелинейных уравнений: уравнения эллипса и уравнения лемнискаты Бернулли. На сайте http://communities.ptc.com/videos/2418 можно увидеть анимацию, показывающую на то, как выбор первого приближения влияет на найденный корень. Более подробно о методах решения, заложенных в функцию **Find**, можно почитать в работе [3].

Примечание. В среде Mathcad Prime по сравнению с Mathcad 15 существенно изменилась технология решения уравнений с помощью функции **Find**. В среде Mathcad Prime не нужно больше вводить ключевое слово **Given**. Достаточно ввести область **Решить** с тремя подобластями. От ключевого слова **Given** отказались в том числе и потому, что многие пользователи после этого слова нажимали клавишу пробела, превращали тем самым это ключевое слово в комментарий и… не понимали, почему Mathcad отказывается решать систему уравнений. На рис. 15 показаны для сравнения решения в обеих версиях Mathcad.

Примечание. Переменная **L**, которой на рис. 15 присваивается начальное значение 10 km (**L := 10 km**), подчеркнута волнистой чертой, указывающей на некую ненормальную расчетную ситуацию в среде Mathcad 15. Переменная **L** по умолчанию в среде Mathcad 15 хранит значение одного литра (единица вместимости) и это значение пользователь переопределяет. В среде Mathcad Prime эта недоработка (неудобство) исправлена – там можно иметь две независимые переменные **L**: единицу вместимости и отдельную пользовательскую переменную, хранящую, как в нашем случае, расстояние.

4. lsolve

Можно понять, что система двух алгебраических уравнений движения двух моторных лодок навстречу друг другу, показанная на рис. 15, *линейна*, и применить к ней еще одну функцию из «великолепной семерки Mathcad» – функцию **lsolve**, предназначенную для решения (solve) именно систем линейных (l) алгебраических уравнений (СЛАУ) – см. рис. 16.

На рисунке 16 система уравнений (показанная на рис. 15), преобразована к виду классической линейной системы: слева неизвестные $\mathbf{v_2}$ и **v** со своими коэффициентами, справа – свободные члены. Функция **lsolve** имеет два аргумента: матрицу коэффициентов при неизвестных СЛАУ (у нас это **M**) и вектор свободных членов **V**. Возвращает функция **lsolve** вектор найденных значений неизвестных. При решении СЛАУ с помощью функции **lsolve** (рис. 16) начальные приближения (см. рис. 15) вводить не надо, т.к. у этой системы либо есть, причем единственное решение, либо решений совсем нет, либо решений бесконечно много.

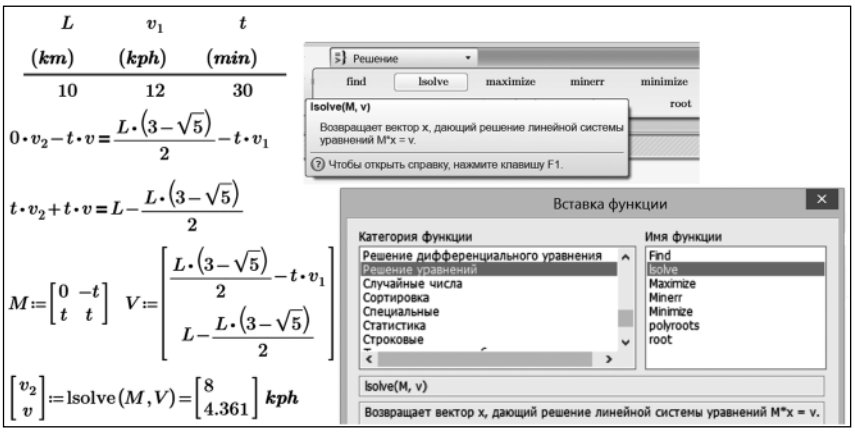


Рис. 16. Решение СЛАУ в среде Mathcad

В [2] дан графический анализ этой особенности с привлечением понятия ранга матрицы.

Примечание. Вторым аргументом функции **lsolve** может быть не только квадратная (классический случай СЛАУ), но и прямоугольная матрица, отображающая недоопределенную или переоопределенную систему.

5 и 6. Minimize&Maximize

Об очередной функции «великолепной семерки» — о функции **Minimize**, будет рассказано на примере *задачи оптимизации*, связанной также с «водным транспортом».

Задача 3. Определить крейсерскую скорость судна – скорость при которой затраты на его эксплуатацию будут минимальны.

Задача предельно упрощена – затраты на эксплуатацию судна состоят из двух частей: почасовой зарплаты экипажа, пропорциональной времени движения судна (обратно пропорциональной скорости судна), и затрат на горючее, пропорциональных квадрату скорости судна (коэффициенты пропорциональности – **a** и **b**). Увеличивая скорость судна, мы экономим на зарплате экипажу, но при этом приходится больше тратить денег на горючее. Попробуем найти тут оптимальное решение!

На рисунке 17 показано решение этой типичной задачи оптимизации с помощью встроенной функции **Minimize** с графической иллюстрацией решения.

Функция **Minimize** меняет значение своего второго аргумента, начиная от заданного предполагаемого значения (у нас это 10 км/ч) так, чтобы значение первого аргумента (целевой функции **Удельные_затраты**) приняло минимальное значение. Если бы мы не минимизировали затраты, а максимизировали, например, прибыль владельца судна, то нужно было бы при решении такой задачи функцию **Minimize** заменить на функцию **Maximize**. В оптимизационных задачах часто присутствуют ограничения – скорость судна, например, не может превышать максимально допустимую. В этом случае функции **Minimize** или **Maximize** нужно будет поместить в область Ограничения блока **Решить**, показанного на рис. 15.

Найти минимум нашей целевой функции **Удельные_затраты** можно и средствами символьной математики Mathcad, что показано на рис. 18.

На рисунке 18 ведется поиск нулей первой производной функции по удельным затратам на километр пути судна. Но если затраты на топливо будут зависеть от скорости судна, взятой не во второй степени, а в степени **n** (этот коэффициент, близкий к двойке, уточняют

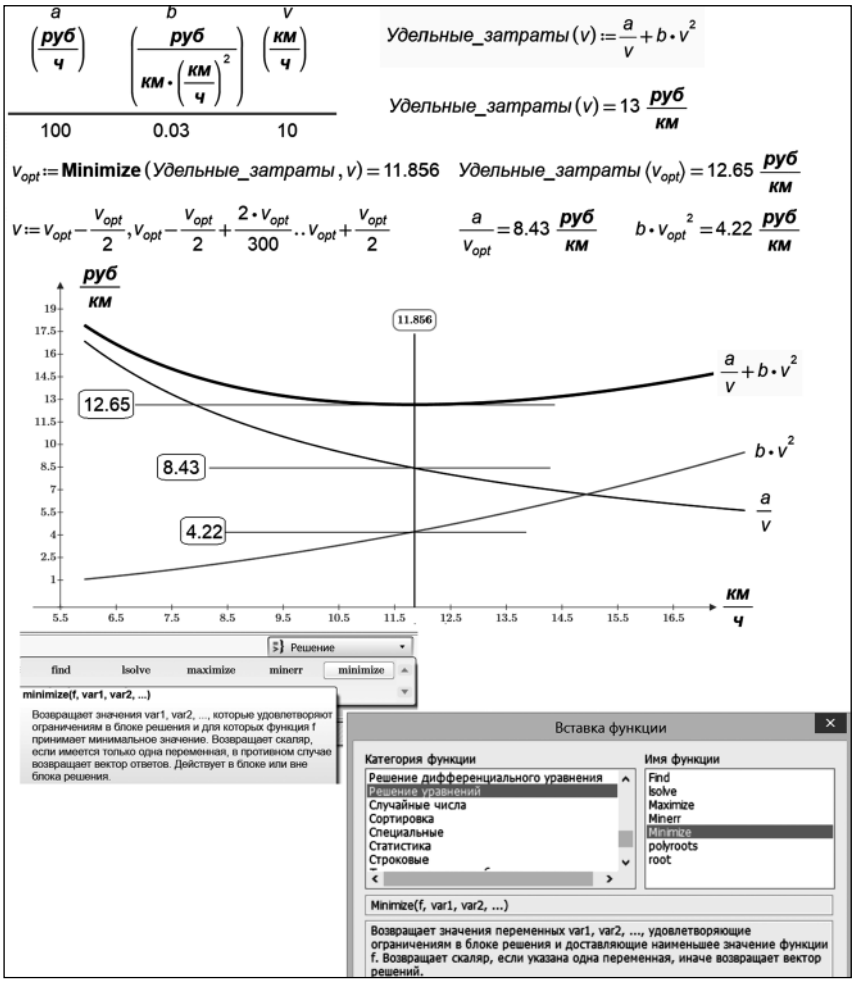


Рис. 17. Нахождение крейсерской скорости судна численной математикойMathcad

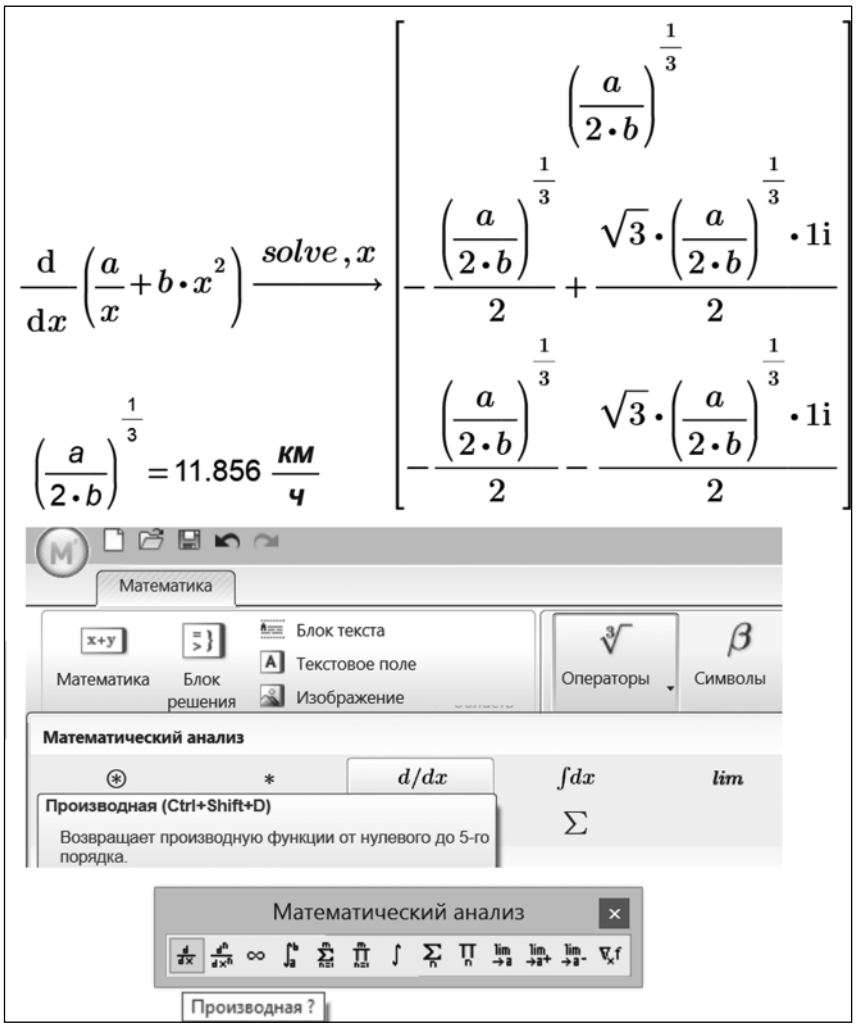


Рис. 18. Нахождение крейсерской скорости судна символьной математикой Mathcad

экспериментально) то символьная математика уже не справится с такой усложненной задачей (рис. 19), и придется вернуться к численным методам решения задач (рис. 17).

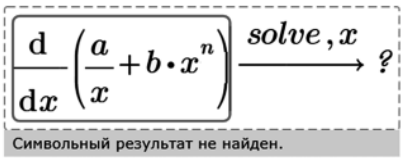


Рис. 19. Осечка при работе с символьной математикой Mathcad

7. Minerr

Последняя функция «великолепной семерки» Mathcad – это функция **Minerr** (Minimal Error – минимальная ошибка). Если функция **Find** (см. рис. 15) не находит решения системы уравнений, то она возвращает сообщение об ошибке. Функция же **Minerr** в такой ситуации возвратит не сообщение об ошибке, а значения своих аргументов (невязку системы), при которых система уравнений будет максимально приближена к системе тождеств – точку последнего приближения к решению. В старых версиях Mathcad не было функций **Minimize** и **Maximize**, и задачи оптимизации приходилось решать именно через функцию **Minerr**. На рисунке 20 показано, как эта функция решает задачу определения крейсерской скорости судна: при оптимальном движении затраты на эксплуатацию судна будут максимально приближены к нулю (мечта всех судовладельцев).

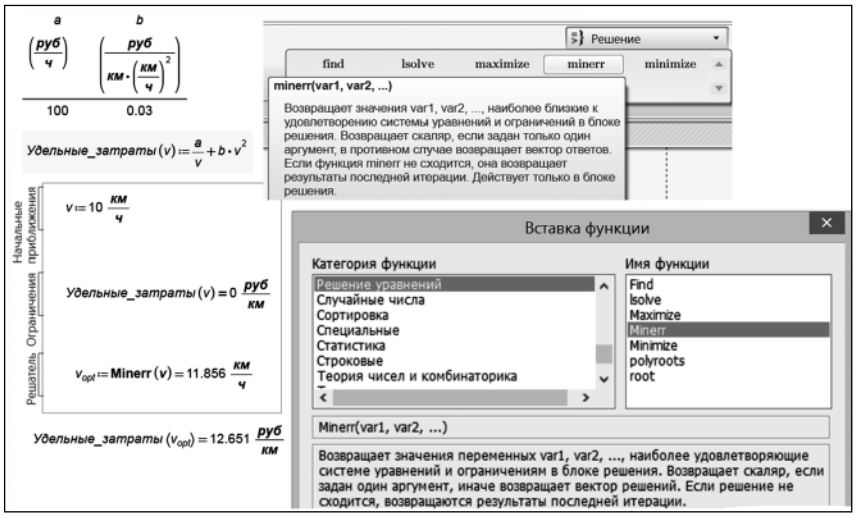


Рис. 20. Решение задачи оптимизации с помощью функции **Minerr**

Функцию **Minerr** можно считать ***главной*** в «великолепной семерке Mathcad», т.к. ею можно заменить и функцию **Find**, и функцию **root** (в двух ее вариантах), и функцию **polyroots**, и функцию **lsolve**, и в ряде случаев функции **Minimize** и **Maximize**.При использовании функции **Minerr** надо обязательно предусматривать проверку решений. Нередки случаи, когда решения могут оказаться ошибочными, чаще всего из-за того, что из нескольких корней находится нереальный (или не представляющий интереса) корень. Дело в том, что функция **Minerr** пытается найти максимальное приближение к искомому числу путем минимизации среднеквадратической погрешности решения. Следует заранее убедиться в том, что решение существует, и как можно точнее указать начальное приближение к решению.

Компьютерная математика с универсальными и скрытыми от пользователей методами аналитических и численных решений за-

ставляет нас забывать о типах уравнений. Вспомним о них!

Типы уравнений

Для того чтобы без проблем и правильно решать уравнения и системы уравнений, нужно знать не только специфику численных методов (см. выше), но и свойства самих уравнений, что поможет решать их аналитически.

Математики уравнения с одним неизвестным относят к одному из четырех типов: *алгебраические*, *рациональные*, *иррациональные* и *трансцендентные*. Метод аналитического решения определяется типом решаемого уравнения.

Если полином n-й степени приравнять нулю, то мы получим **алгебраическое** уравнение. Основная теорема алгебры говорит о том, что такое уравнение имеет ровно n корней. Но во-первых, не все корни будут действительными и, возможно, вообще не существует ни одного действительного корня. А во-вторых, корни могут совпадать, т.е. быть кратными. Доказано, что не существует формул для корней алгебраического уравнения выше пятой степени. Но и формулы для $n = 5$ настолько громоздки, что их использование лишено какой-либо практической пользы. Mathcad может символьно решать алгебраические уравнения вплоть до четвертой степени.

Если уравнение более высокой степени допускает частичное разложение на множители, то оно тоже может быть символьно разрешимо. Тут уместно вспомнить школьный метод подбора целого корня и теорему Безу. Если алгебраическое уравнение имеет целые коэффициенты, и делители свободного члена известны, то можно подобрать целый корень x_0 (если такой имеется) «вручную», либо использовав Mathcad. Поделив полиномиальную функцию на двучлен $(x - x_0)$, получим алгебраическое уравнение степени на единицу меньше. Если целый корень не подбирается, то такое уравнение теряет свои преимущества и становится в один ряд с другими типами уравнений.

Рассмотрим теперь рациональные уравнения. Такие уравнения содержат исключительно дроби, в числителях и в знаменателях которых находятся только многочлены. С помощью Mathcad эти уравнения легко формально преобразовать в алгебраические. Правда, при таких преобразованиях может измениться область допустимых значений преобразуемого уравнения, т.к. знаменатель какой-то дроби может оказаться в числителе. Это порождает проблему посторонних корней, а поэтому решение рационального уравнения требует обязательной проверки (подстановки полученных чисел в **исходное** уравнение). Если все дроби в рациональном уравнении «одноэтажные», то проверку можно заменить предварительным поиском области определения рациональной функции, приравняв нулю все знаменатели. Если дроби «многоэтажные», то такая процедура потребует априорных упрощений. Если хоть в одном из знаменателей находится многочлен третьей или более высокой степени, то поиск допустимых значений оборачивается поиском корней нового алгебраического уравнения. В таком случае проверка – более экономный способ отсечения посторонних корней.

Иррациональными называют такие уравнения, которые помимо рациональных функций содержат радикалы (корни целых степеней – квадратные, кубические и т.п.), а все подкоренные выражения являются рациональными функциями. Известно, что радикалы четных степеней определены не везде в действительной области. Это обстоятельство приводит к необходимости находить область определения прежде, чем решать само уравнение. Фактически само уравнение следует сопроводить неравенствами, которые Mathcad тоже будет решать. Если этого не слелать, то уравнение по умолчанию будет решаться на области комплексных чисел, которые для большинства пользователей, исследующих реальные физические и другие явления, попросту бесполезны.

Вторая проблема, возникающая при решении уравнений с радикалами четных степеней – появление посторонних корней. Ведь основным методом решения иррационального уравнения является метод возведения обеих частей уравнения в нужную степень, а при возведении в четную степень как числа x, так и числа $-x$, мы получим один и тот же результат. В итоге получается новое уравнение, строго говоря, не равносильное исходному. Заметим, что есть аналитические способы решения и уравнений с кубическими (и другими нечетными) радикалами, которые тоже приводят к посторонним корням. Но тут снова можно прибегнуть к проверке, т.е. подстановке полученных числовых величин в исходное уравнение. Следует помнить, что лишние корни вполне могут принадлежать области определения функции, приравниваемой нулю.

Класс **трансцендентных** уравнений обширен. В него входят показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, а также уравнения, содержащие различные (а не только степенные) элементарные функции и композиции элементарных функций. Помимо проблем, связанных с областью определения, в таких уравнениях при наличии тригонометрических функций могут возникнуть проблемы с периодичностью решений.

В зависимости от того, сколько неизвестных входят в систему уравнений, можно выделить два типа систем: системы с одним неизвестным и системы с несколькими неизвестными. Классификация всех систем – занятие бессмысленное, поскольку специальные эффективные (матричные) методы решения разработаны только для систем линейных алгебраических уравнений с несколькими неизвестными. Такие системы еще называют линейными алгебраическими системами. Все другие системы решаются с помощью одних и тех же общих численных методов.

Системы с одним неизвестным можно решить так: найти по отдельности решение каждого уравнения системы, а потом выбрать одинаковые для всех уравнений числа. Часто можно поступить проще: сначала решить то уравнение, которое имеет наименьшее число

корней, а потом все эти корни подставить в каждое из оставшихся уравнений системы.

Нелинейные системы с несколькими неизвестными решаются численными итерационными методами, требующими задания начального приближенного значения искомых неизвестных.

Выбор метода решения уравнения

Посмотрим, чем же стоит руководствоваться при выборе метода решения конкретного уравнения или системы.

Для вычисления всех корней алгебраического уравнения не выше пятой степени рекомендуется использовать символьные вычисления а также функцию **polyroots** (см. рис. 13), поскольку она не требует проведения процедуры локализации корней. Во всех остальных случаях придется либо локализовать корень на конкретном отрезке, либо использовать итерационные методы, имея достаточно хорошее начальное приближение и выбрав подходящую точность вычислений.

Прежде чем начать поиск корней уравнения, нужно на нескольких различных интервалах построить график функции, приравниваемой к нулю. Поведение графика даст ответ на несколько вопросов. Имеет ли функция действительный корень? Где он расположен? Сколько всего действительных корней? Отделены ли корни друг от друга, или они имеют некоторую точку скопления? Можно ли считать, что корни периодически повторяются, и чему равен период? Есть ли у функции точки разрыва, и насколько далеко от них лежат корни? Следует ли уменьшить значение системной переменной **CTOL**, чтобы различить два близко расположеных корня?

Когда ответы на все вопросы получены, тогда можно определиться с методом и точностью вычислений.

Заметим, что если проигнорировать этап построения графика функции, то, например, функция **root** может сработать некорректно. Правда, по графику нельзя определить, попадет ли в процессе решения в точку локального минимума невязки последовательность приближений. Если причина ошибки в этом, то нужно задать другое начальное приближение. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее итерационный процесс будет сходиться.

Результатом решения системы будет численное или символьное значение вектора неизвестных величин. При символьном решении не надо вводить начальные значения, а при численном – надо. Если в системе всего два неизвестных, то построение трехмерных графиков функций, входящих в систему, позволит удачно подобрать начальное приближение для решения системы. В случае неудачного начального приближения появится сообщение об отсутствии сходимости последовательности итераций. Тогда придется начать все сначала, задав другое первое приближение.

Широкое использование компьютеров для аналитического или численного поиска корней уравнений привело к тому, что многие пользователи перестали чувствовать разницу между алгебраическими, рациональными, иррациональными и трансцендентными уравнениями. Более того, все эти уравнения стали называться просто алгебраическими. Так в документации Mathcad сказано, что этот пакет может численно решать и системы алгебро-диффренциальных уравнений (DAE) – системы, где присутствуют и алгебраические и дифференциальные (см. ниже) уравнения. Хотя там могут быть и другие типы уравнений – рациональные, иррациональные и трансцендентные.

Раз мы упомянули дифференциальные уравнения, то следует сказать, что в Mathcad Prime к великолепной семерке добавилась еще одна функция – функция **Odesolve**.

7+1. Odesolve

Наша первая задача о “круизе” моторной лодки (см. рис. 1 и 2) имела существенное допущение: скорость лодки была постоянной. Но это условие выполнить практически невозможно, т.к. лодка по прибытии в один конец пути должна сбросить скорость, развернуться и пуститься в обратный путь. Можно, конечно, подправить задачу так: лодка достигает конечной точки и в этот момент эстафету принимает другая моторная лодка, движущаяся с такой же собственной скоростью, но в обратном направлении. Приблизить задачу об одной лодке к реальным условиям нам поможет еще одна встроенная функция Mathcad – функция **Odesolve**, предназначенная для решения (solve) обыкновенных (o – ordinary) дифференциальных (d) уравнений (e – equation) и их систем. Если при численном решении алгебраических уравнений мы получаем числа, подстановка которых в уравнения превращает их в тождества или в почти тождества, то при решении дифференциальных уравнений и их систем мы получаем уже не числа, а *функции*, подстановка которых

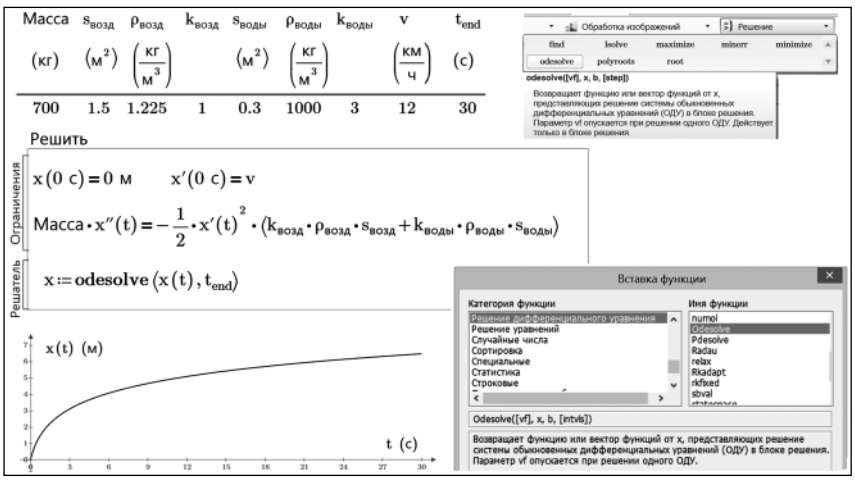


Рис. 21. Решение задачи об остановки лодки

превращает исходные дифференциальные уравнения в тождества. Заметим, что функция **Odesolve** в группе «Решение уравнений» стала восьмой (7 + 1 – см. выше) только в среде MathcadPrime. В Mathcad 15 в группе «Решение уравнений» ее не было, но она была в другой группе.

Итак, задача 4. На моторной лодке, движущейся со скоростью **v**, заглушили мотор. Спрашивается, как будут меняться во времени пройденный ею путь? Задача предельно упрощена – на лодку действует силы трения воды и воздуха, пропорциональные квадрату скорости лодки (см. рис. 17, 18, 19 и 20, где этот квадрат присутствовал). На рисунке 21 показано решение этой задачи с помощью функции **Odesolve** и его графическое отображение.

Коэффициент пропорциональности между инерцией и силой трения, записанный в уравнении на рис. 21 (масса лодки, помноженная на ускорение – на первую производную скорости по времени), состоит из двух частей, связанных с трением о воздух надводной части лодки и трением о воду ее подводной части. Эти коэффициенты пропорциональны плотности ρ среды (воздуха или воды) и площади поперечного сечения надводной и подводной частей лодки S. В уравнение можно добавить силу тяги мотора и моделировать также старт моторной лодки и ее последующее движение с переменной или постоянной тягой мотора. Если скорость лодки станет постоянной, то дифференциальное уравнение превратится в алгебраическое: сила тяги мотора будет уравновешиваться силой сопротивления воды и воздуха.

Задачу об остановке моторной лодки мы решили численно: функция **Odesolve** не ищет аналитического решения уравнения. Она формирует таблицу значений искомой функции с именем **x** (пройденный путь), по которой методом интерполяции создается непрерывная функция, график которой мы построили на рис. 21. На сайте http://communities.ptc.com/videos/1471 можно просмотреть авторскую анимацию численного решения обыкновенного дифференциального уравнения методами Эйлера и Рунге-Кутта, а на сайте http://communities.ptc.com/videos/1699 помещена анимация похожей задачи – остановки автомобиля под действием сил трения. Другие авторские динамические модели (вращение планет со спутниками, качание маятников, спуск на парашюте, ныряние в воду, движение в туннеле, запуск ракеты с подводной лодки, скатывание с горы и др.), реализованные в среде Mathcad, можно найти здесь http://communities.ptc.com/groups/dynamic-models-in-mathcad.

В среде Mathcad нет средств аналитического (символьного) решения дифференциальных уравнений. Но их можно поискать и найти в Интернете. На рисунке 22 показано аналитическое решение задачи о движении моторной лодки – логарифмическая функция. Оно нашлось, поскольку исходное уравнение было достаточно простым: вторая производная функции пропорциональна квадрату ее первой производной. Но если с нашей задачи о движении лодки начать снимать ограничения, то символьного решения уже не будет, и нам придется возвращаться к численным методам – к функции **Odesolve**. Так, например, при торможении лодки площадь поперечного сечения ее надводной части уменьшается (лодка проседает в воду), а подводной части растет (вспомним, что самые быстроходные суда те, у которых подводная часть минимальна: глиссирующие суда, суда на подводных крыльях или на воздушной подушке). Коэффициенты $\mathbf{k_{возд}}$ и $\mathbf{k_{воды}}$ (см. блок исходных данных на рис. 21) в свою очередь зависят от скорости и характера движения лодки: они одни при ламинарном обтекании тела и другие при турбулентном движении, когда за лодкой клубятся вихри воды и воздуха. У воды и воздуха разная вязкость, что тоже нужно учитывать при математическом моделировании движении лодки. Этим занимается очень интересная наука под названием *гидрогазодинамика*…

И последнее. После нахождения корня алгебраического уравнения (или решения системы уравнений) всегда, независимо от метода, стоит сделать *проверку* – подставить найденное значение (значения) в уравнение (в систему) и убедиться, что получилось тождество. Или почти тождество, если используются численные (приближенные) методы решения. Проверка решения

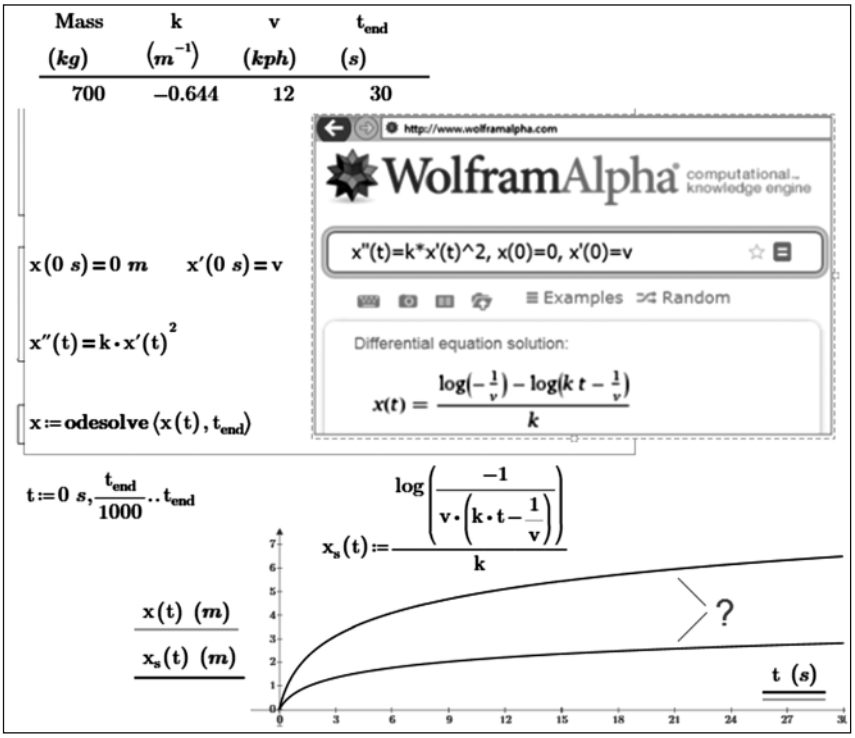


Рис. 22. Графическое сравнение аналитического и численного решения ОДУ

рассматриваемого дифференциального уравнения может заключаться в построении графика баланса сил и произведения массы на ускорение (если иметь ввиду задачу, показанную на рис. 21) в зависимости от аргумента полученной функции (**t** – см. рис. 21). Этот график должен совпадать с осью x. Кроме того, если есть аналитическое решение дифференциального уравнения, то его можно сравнить с численным решением. Мы это сделали в расчетном документе, показанном на рис. 22, где Mathcad-документ (численное решение задачи об остановке лодки) дополнен аналитическим решением.

Почему на рисунке 22 графики торможения моторной лодки не совпали? Авторы долго ломали над этим головы, пока не сообразили, что в пакете Mathematica (а именно он работает на отмеченном на рис. 22 сайте) **log** – это натуральный логарифм, а в пакете Mathcad – десятичный. Этим и объясняется различный наклон логарифмических кривых. Если в формуле над кривыми функцию **log** заменить на **ln** или **log(…, e)**, то эти две кривые сольются в одну.

Дифференциальные уравнения тоже можно разбить на типы. Есть, например, линейные дифференциальные уравнения, решения которых можно свести к решению алгебраических уравнений. Но это тема для отдельной статьи.

Выводы

Каждая из рассмотренных функций «великолепной семерки Mathcad» обладает своими особенностями и ограничениями. Прежде чем приступать к решению задачи, следует продумать, какая из этих функций приведет к поставленной цели, причем наилучшим образом.

Школьнику, студенту, инженеру или ученому необходимо (а в ряде случаев и достаточно) освоить «великолепную семерку Mathcad», особенности численных, графических и аналитических методов решения задач, чтобы успешно решать на компьютере свои учебные или профессиональные задачи [4].

Литература

1. *Очков В.Ф.* Физические и экономические величины в Mathcad и Maple (Серия «Диалог с компьютером»). М.: Финансы и статистика. 2002 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Units/Forword_book.htm)
2. *Очков В.Ф.* Преподавание математики и математические пакеты // Открытое образование, №2. 2013. С. 23–34 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/OchkovMath-pdf.pdf)
3. *Очков В.Ф.* Решение алгебраических уравнений и систем или Ван Гог в среде Mathcad // КомпьютерПресс. № 9. 2001. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Carpet/index.htm)
4. Теплотехнические этюды с Excel, Mathcad и Интернет / Под общ. ред. В.Ф. Очкова. Издательство БХВ-Петербург. 2014. – 336 с. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/TTMI)