

## Литературно-физическая композиция «Истории о зеркале и линзе»

*В композиции, пардон, статье обсуждается возможность и целесообразность преподавания информатики, математики, физики и даже литературы в рамках учебной дисциплины с условным названием Физико-математическая информатика (ФМИ). На западе эта технология получила название STEAM – Science, Technology, Education, Art, Mathematic. На примере решения задач оптики обсуждаются такие инструменты математики: функция одной переменной, ее производная и нормаль, система дифференциальных и алгебраических уравнений, ее аналитическое и численное решение с помощью Интернета, систем компьютерной математики и форумов пользователей Mathcad. Рассматриваются физические законы отражения и преломления света.*

*Сайты статьи с дополнительными материалами, рабочими файлами, анимациями и обсуждениями решенных и нерешенных задач: <https://www.ptcusercommunity.com/thread/128198>, <https://www.ptcusercommunity.com/thread/130104> и <https://www.ptcusercommunity.com/message/433664>.*

**Ключевые слова:** математика, физика, оптика, литература, информатика, дифференциальное уравнение, Интернет, Mathcad, производная, нормаль, зеркало, линза, отражение света, преломление света.

### PHYSICAL AND LITERARY COMPOSITION «STORIES ABOUT THE MIRROR AND THE LENS»

*In the article discusses the possibility and expediency of teaching computer science, mathematics, physics, literature, and even within a single academic discipline, to be called Mathematical Physics and IT (MPhIT or STEAM). For example, solving the problems of optics discusses such tools of mathematics: the function of a single argument, its derivative, and the normal system of differential and algebraic equations, its analytic and numerical solution with the help of the Internet, computer systems, mathematics and user forums Mathcad. The physical laws of reflection and refraction of light.*

**Keywords:** mathematics, physics, optics, literature, computer science, STEAME, differential equation, Internet, Mathcad, derivative, normal, mirror, lens, light reflection, light refraction.

В [1] было отмечено, что в настоящее время в образовательном процессе намечается тенденция одновременного чтения курса информатики, математики и физики. В рамках этой новой учебной дисциплины (ее условное название Физико-математическая информатика<sup>1</sup> – ФМИ) можно также затра-

гивать вопросы и специализированных учебных курсов. Тем более в истории есть интересные и поучительные примеры: в тридцатые годы прошлого века выдающийся ученый Норберт Винер («отец кибернетики» – см. сноску 1) читал в Массачусетском технологическом институте годовой объединенный

курс лекций по математике и электротехнике, затрагивая при этом дивергенцию, ротор и прочие математические атрибуты электромагнитных полей.

На начальном (переходном) этапе можно так кардинально не менять содержание лекций по математике, физике и информатике,

<sup>1</sup> Анекдот советских времен. В одном вузе в плане оптимизации учебного процесса объединили кафедры Кибернетики и Математики. Получилась кафедра с несколько неприличным названием. Если читатель не вспомнит его, то он может порыться в Рунете. Шутки шутками, но кибернетику наряду с генетикой советский режим не жаловал – их сразу объявили *продажными девками империализма*. Хотя здесь не все так однозначно – загляните, например, сюда <http://aabad.livejournal.com/20828.html>. Неприятие кибернетики чувствуется и в наши дни. Это проявляется, в частности, в том, что многие «чистые» математики упорно отвергают использование компьютерных математических пакетов в учебном процессе [2, 3], а прикладных математиков – математиков, разрабатывающих численные методы решения задач, считают недоматематиками («нечистыми» математиками). В дополнение к этому можно упомянуть и тот факт, что у нас нет научной дисциплины, по которой могли бы защищаться люди, связанные с кибернетикой и информатикой. Им присваивают степени кандидата или доктора физико-математических, химических, технических, педагогических, философских и прочих околокомпьютерных наук.



**Валерий Федорович Очков,**

*д.т.н., профессор*

Тел.: (495) 362-71-71

Эл. почта: ochkov@twi.mpei.ac.ru

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

<http://www.mpei.ru>

**Valerij F. Ochkov**

*D. Sc. in Engineering, Professor*

Тел.: (495) 362-71-71

E-mail: ochkov@twi.mpei.ac.ru

National research university «Moscow Power Engineering Institute»

<http://www.mpei.ru>



**Яна Калова,**

*PhD, преподаватель математики  
Университет Южной Богемии, Чехия*

*Будеёвице, Чехия*

Тел.: +420-387-776-201

Эл. почта: jkalova@prf.jcu.cz

**Jana Kalova,**

*PhD, Lecturer of mathematics*

*University of South Bohemia*

Тел.: +420-387-776-201

E-mail: jkalova@prf.jcu.cz

объединяя их в одну, а поступить иначе. Допустимо на первой паре лекционных занятий прочесть студентам классическую математическую лекцию по анализу функции одной переменной, а затем на второй паре – лекцию или семинар в рамках занятий по Информатике о том, как Интернет с его расчетными сайтами и форумами, а также современные математические программы (системы компьютерной математики) могут на примере решения конкретных практических задач будущей специальности студентов работать с пределами, производными, интегралами, рядами и прочими математическими понятиями, о которых было рассказано на первой лекции. В такую связку можно вклинить учебные материалы не только по техническим дисциплинам, но и по... литературе [4–6]. Получится очень интересная образовательная технология в рамках новой дисциплины под вышеупомянутым названием ФМИ: рассматриваются теоретические, художественные, исторические и общекультурные аспекты некоторого процесса (математика и литература), далее ставится эксперимент и дается его оценка (физика), а в завершении создается, реализуется (аналитически и/или численно) и по возможности анимируется математическая модель рассматриваемого процесса. А то сейчас в преподавании математики наблюдается то, о чем говорят «из-за деревьев леса не видно»: изучаются пределы, производные, интегралы и техника их «взятия», а где и как все это применяется на практике, остается за скобками занятий.

В [1] было описано конкретное содержание одной такой лекции, связанной с цепной функцией. В дополнение к лекции предлагается простая в реализации, но интересная лабораторная работа. Подвешивается в двух точках цепь (однородная или состоящая из частей с разной линейной массой), к которой крепится точечный груз. Все это фотографируется на камеру, а файл снимка провисающей цепи передается на компьютер, где автоматически или вручную оцифровывается: генерируются два вектора

значений абсцисс и ординат отдельных точек (звеньев) цепи. Затем создается математическая модель: система дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающих провисание цепи, которая решается на компьютере численно и/или аналитически. Завершается работа сравнением данных, снятых с реальной цепи, и данных, полученных при реализации математической модели цепи на компьютере: на экране дисплея ставятся точки по двум векторам, полученным со снимка, и прорисовывается кривая, полученная в результате решения системы уравнений. В завершении такой лабораторной работы ведется статистическая обработка решения, даются оценки погрешностей и прочее, и прочее... Тут можно перейти к эластичным и прочностным характеристикам материала цепи или каната (сталь, пластик), порассуждать об инженерных аспектах и красоте висячих мостов, воздушных линий электропередач, подвесных канатных дорог...

А вот содержание другой подобной лекции, охватывающей математику, физику, информатику и... литературу. Начнем с литературы.

Есть такой популярный жанр беллетристики: описывается загадочное преступление (кража, похищение, шантаж, убийство и т.д.), которое быстро и оригинально раскрывает некий сыщик: профессионал или любитель. Мастерами такого жанра были Артур Конан Дойль со своим Шерлок Холмсом, Агата Кристи с мисс Марпл и Эркюлем Пуаро, Гильберт Честертон с отцом Брауном, Жорж Сименон с комиссаром Мегре... Современных авторов мы тут пока не упоминаем – пусть их работы сначала выдержат проверку временем.

Менее известны, но не менее интересны детективные произведения чешского писателя Карела Чапека (1890–1938), входящие в циклы рассказов из одного кармана и другого кармана. В одном из них под названием «Истории о взломщике и поджигателе» описывается загадочный пожар: в ясный солнечный день сидит человек дома со своим семейством и празднует именины. Но тут стучат ему в окно и кричат,



**Алексей Викторович Соколов,**  
учитель физики  
Лицей № 1502 при Московском  
энергетическом институте  
Тел.: (495) 307-11-61  
Эл. почта: av\_sokol\_1502@mail.ru

**Alexey V. Sokolov,**  
Teacher of physics  
Lyceum 1502 at Moscow Power  
Engineering Institute  
Tel.: (495) 307-11-61  
E-mail: av\_sokol\_1502@mail.ru



**Юлия Владимировна Чудова,**  
методист  
Лицей № 1502 при Московском  
энергетическом институте  
Тел.: (495) 300-00-20  
Эл. почта: julia.chudova@gmail.com

**Julia V. Chudova,**  
Methodist  
Lyceum 1502 at Moscow Power  
Engineering Institute  
Tel.: (495) 300-00-20  
E-mail: julia.chudova@gmail.com

что у него крыша горит... На следующий день сыщик, выполняя функции пожарного дознавателя, замечает на обгоревшей балке чердака сгоревшего дома какой-то блестящий предмет. Это оказалась лупа, которую, как выяснилось в результате расследования, задолго до пожара установил на чердаке бывший ученик хозяина дома. Он был зол на патрона за то, что тот не позволял ему делать опыты и лупил его. Решив отомстить хозяину, мальчик рассчитал, где будет стоять солнце в полдень тринадцатого июня в день именин хозяина, и укрепил на чердаке лупу под таким углом, чтобы загорелась солома, а он к тому времени убрался подальше...

Этот рассказ не столько детективный, сколько... научно-фантастический: рассчитать положение лупы так, чтобы она сфокусировала солнечные лучи на соломе крыши дома именно в заданный день, практически невозможно, учитывая сильную «размытость» данной задачи и разного рода оптические aberrации, о которых будет рассказано ниже. Но научная и околону научная фантастика в той или иной мере присутствует во многих детективах. Рассказ заканчивается так: «Осмотреть эту лупу приезжал ученый астроном из Вены и долго качал головой, глядя, как точно она соответствует положению солнца в зените именно на тринадцатое июня <...>».

Небольшое лирическое отступление.

Когда первый автор этой статьи слышит слово «весна», ему сразу видится яркий солнечный свет, слышится журчание ручьев и чудится запах... паленого дерева. Дело в том, что в детстве этого автора в первые весенние солнечные дни многие мальчишки высыпали на улицу с лупами и выжигали на деревяшках буквы и всяческие фигурки<sup>1</sup>. Особым шиком считалось делать это не лупой (плоско-выпуклой или двояковыпуклой линзой), а осколком вогнутого зеркала, который добывали из прожекторов

варварским способом – с помощью рогатки... Обзавестись лупой было намного проще – ее можно было купить в магазине, обменять у кого-то на что-то или незаметно на время позаимствовать у отца-филиателиста.

Итак, истории о зеркале и линзе.

Начнем с вогнутого зеркала. Рассчитать, как установить его, чтобы оно подожгло что-то в заданный день, можно, конечно, попробовать. Но для начала мы определим, какой должна быть форма зеркала, чтобы параллельный пучок света сфокусировался в точку и подпалил деревяшку, к примеру. Или, если говорить не о весенних детских забавах, а о прожекторе, то задачу можно сформулировать так: какова должна быть форма его зеркала, чтобы свет из точечного источника (из мощной лампы накаливания или вольтовой дуги), отразившись в зеркале превратился в параллельный пучок.

Еще одно авторское воспоминание.

В 50-60-х годах прошлого века во время праздничных салютов по небу гуляли перекрещивающиеся лучи прожекторов. Было очень красиво. И сейчас в старых военных фильмах можно видеть, как мощные прожекторы захватывают своими лучами вражеский бомбардировщик, слепят пилотов и направляют на цель зенитки... В Москве был целый завод под названием «Прожектор», выпускавший эту осветительную технику двойного назначения. Правда в этих больших прожекторах использовались не цельные вогнутые зеркала, форму которых мы попытаемся определить, а отдельные плоские треугольные или трапециевидные куски зеркал, которые можно было двигать и менять форму луча. Все эти знания и навыки сейчас используются при проектировании и эксплуатации радиотелескопов. Есть также электростанции с системой зеркал, направляющих солнечный свет на паровой котел,

<sup>1</sup> Герои романа Жюль Верна «Таинственный остров» добыли огонь с помощью двух стекол, снятых с часов. Эту импровизированную линзу они наполнили водой (см. сноску 2 на стр. 39) и скрепили ее края глиной. Так было сделано настоящее зажигательное стекло, которое сосредоточило лучи солнца на охапке сухого мха и воспламенило его.

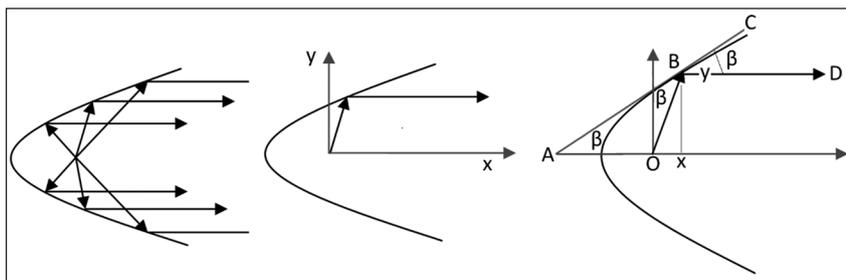


Рис. 1. Схема зеркала прожектора

установленный на башне. Пар из котла поступает в турбину, которая вращает электрогенератор. Эти зеркала, расположенные на земле и управляемые компьютером, подобно подсолнуху следуют за солнцем, «косясь» при этом на паровой котел. В наши дни праздничное ночное небо освещают различными лазерными устройствами, генерирующими не «белый» свет, а свет определенной волны видимого диапазона. Прожектор же (софит) сейчас можно увидеть в театре, цирке, а также на съемках фильмов. А в детстве на салютах можно было подойти к прожекторам, установленным на машинах-трехтонках ЗИС-5, и с замиранием сердца наблюдать, как с треском и шипением зажигается вольтова дуга и как солдаты, управляя прожектором и зеркалами в нем, направляют свет в ночное небо...

**Задача:** до какой поверхности надо отшлифовать зеркало прожектора, чтобы лучи, исходящие из точечного источника света, помещенного в точке  $O$  на оси вращения (фокус), отражались бы зеркалом параллельно этой оси (см. рис. 1).

Многие считают, что эта поверхность должна быть *гиперболоидом*, опираясь при этом не на физику, а на... лирику задачи – на литературу и припоминая знаменитый роман А.Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина», поджигающего не весенние деревяшки,

а корабли<sup>1</sup>, заводы и целые города. Но на самом деле тут должен быть *параболоид*, а гиперболоид<sup>2</sup> в романе упоминается из-за звучности этого слова. Из-за его гиперзвучности.

В приближении геометрической оптики, т.е. пренебрегая всеми волновыми световыми явлениями и заменяя реальный световой поток с его корпускулярно-волновым дуализмом большим количеством лучей (см. левую схему на рис. 1), выведем формулу отражающей поверхности зеркала, при которой лучи исходящие из одной точки (из *фокуса*) после отражения от зеркала превратятся в параллельный пучок лучей. Рассмотрим один из таких лучей (средняя схема). Введем оси координат  $x$  (горизонталь) и  $y$  (вертикаль). Определим, какой функции  $y(x)$  должна отвечать поверхность зеркала, вернее, одна линия (сечение) на этой поверхности в указанных осях координат. Это можно сделать, если на правой схеме рис. 1 выделить два треугольника – один с вершинами  $ABO$ , а второй с вершинами  $OBx$ , у которых одна общая сторона  $OB$ . Эта «общность сторон» и позволит нам вывести уравнение фокусирующего вогнутого зеркала.

На поверхности зеркала выполняется закон отражения (см. правую схему на рис. 1): угол  $ABO$  равен углу  $CBD$  (обозначим эти

углы как  $\beta$ ). С другой стороны, угол  $CBD$  равен углу  $BAO$ , т.к. луч  $BD$  параллелен оси  $x$ . Следовательно, треугольник  $ABO$  равнобедренный: длина его стороны  $AO$  равна длине стороны  $OB$  (следствие закона отражения лучей). Поскольку точка  $B$  имеет координаты  $x$  и  $y$ , то исходя из определения тангенса (отношение катета противолежащего к катету прилежащему):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{AO + x},$$

следовательно

$$AO = \frac{y}{\operatorname{tg} \beta} - x,$$

но (вспомним о геометрической сути производной)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dy}{dx},$$

поэтому

$$AO = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} - x.$$

С другой стороны из теоремы Пифагора следует, что

$$OB = \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Получаем уравнение, в котором присутствует производная функции, т.е. дифференциальное уравнение:

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} - x = \sqrt{y^2 + x^2}.$$

Введем дополнительное обозначение для значения  $x$  при  $y$  равном нулю:  $y(F) = 0$ . Решим полученное дифференциальное уравнение аналитически (рис. 2 – сайт wolframalpha.com) и численно (рис. 3 – Mathcad Prime).

Рис. 2. Аналитическое решение уравнения зеркала прожектора

<sup>1</sup> По легенде при обороне Сиракуз от осаждавших этот город римских войск Архимед создал «зажигательное зеркало», с помощью которого он уничтожил вражеские галеры. В наши дни в Лондоне один высотный дом своим вогнутым стеклянным фасадом фокусирует лучи солнца на противоположной стороне улицы. Жители в шутку приносят туда свою еду для разогрева... Есть, кстати, специальный модуль для программы MatLab, позволяющий рассчитывать светоотражающие аспекты сооружаемых зданий.

<sup>2</sup> Гипербола и парабола, наряду с эллипсом относятся к кривым второго порядка, по траекториям которых движутся многие космические тела. «Физико-математическая информатика» такой небесной механики описана в [7].

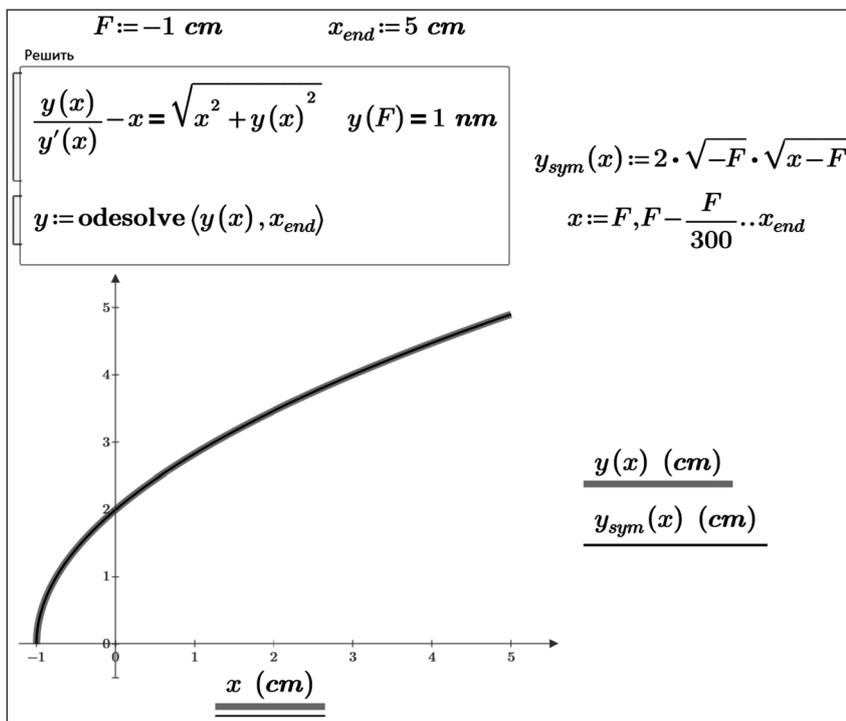


Рис. 3. Численное решение уравнения прожектора и сравнение его с аналитическим

На графике рис. 3 прорисованы две совпадающие кривые – одна толстая  $y(x)$  и другая тонкая  $y_{sym}(x)$  внутри толстой для проверки правильности численного решения. Если дорисовать нижнюю половину кривой и поменять местами оси, то и получится искомая парабола вида  $x^2/(4 \cdot F)$ : будет доказано, что наше зеркало – это параболоид, а не гиперболоид, вернее, одна из полостей двуполостного гиперболоида. Парабола и гипербола, а также эллипс (в частности, окружность) получаются, если косо рассечь плоскостью прямой круговой конус.

**Примечание.** Начальным условием численного решения задачи на рис. 3 стоит не  $y(F) = 0$ , а  $y(F) = 1 \text{ nm}$  (один нанометр). Если бы там стоял нуль, а не величина близкая к нулю, то задача не решалась бы численно из-за того, что производная в этой точке равна бесконечности. Пришлось чуть-чуть схитрить и обмануть компьютер. Можно сказать, что нанотехнологии помогли нам решить эту задачу! Шутки шутками, но полировка с ювелирной точностью зеркал для телескопов и покрытие их поверхности ровным слоем светоотражающего материала – это настоящая нанотехнология, возникшая задолго до появления

этого слова<sup>1</sup>. Можно было «схитрить» и по-иному – поменять оси. Тогда производная функции в нулевой точке будет равна нулю, а не бесконечности.

Пакет Mathcad, кстати, может численно решать не только одиночные дифференциальные уравнения (см. пример на рис. 3), которые еще нужно уметь вывести, но и системы уравнений, в которые входят дифференциальные и алгебраические<sup>2</sup> уравнения. Это в ряде случаев упрощает составление математических моделей. Так на рис. 4 показано численное решение задачи о форме вогнутого зеркала, в математическую модель которого вложены следующие наши элементарные знания предмета: производная функции равна тангенсу наклона касательной (первое уравнение), квадрат гипоте-

нузы равен сумме квадратов катетов (2), угол падения равен углу отражения (3) и, наконец, синус – это отношение противолежащего катета к гипотенузе (4). Все эти четыре уравнения при желании можно собрать в одно и получить уравнение, показанное на рис. 2 и 3, выведенное анализом правой схемы на рис. 1. Но лучше поручить эту возню с отдельными уравнениями компьютеру – см. рис. 4. Лучше и в том плане, что развернутая модель открыта для возможных изменений. Можно, например, в третьем уравнении двойку в знаменателе заменить на... тройку и сказать, что поверхность зеркала обладает таким необычным свойством: угол падения в два раза больше угла отражения или наоборот. Ведь есть и необычные зеркала – такие, какие, например, отбрасывают лучи света строго в сторону источника. Такое «зеркало» получается, если обычные плоские зеркала расположить друг к другу под прямым углом<sup>3</sup>. Этим свойством обладают так называемые уголки отражатели и катафоты, которые устанавливают на автомобилях и велосипедах. Можно также представить себе зеркало, у которого синус угла падения равен... косинусу угла отражения, и поиграть с этой моделью – найти форму фокусирующего зеркала с такой полуфантастической отражающей поверхностью...

**Примечание.** В схемах, показанных на рис. 1 и 4 оси абсцисс проходят через разные точки – через фокус (рис. 1) или через нулевую точку (рис. 3). Выбор системы координат (декартова, полярная, цилиндрическая, сферическая и проч.), начальной точки и расположения осей – это важный этап решения задачи, часто определяющий успех этого дела.

<sup>1</sup> Раньше говорили: «Я поехал на дачу красить забор». Сейчас: «... покрывать забор нанослоем краски».

<sup>2</sup> Под алгебраическими уравнениями сейчас все чаще и чаще подразумевают не только собственно уравнения, куда входят полиномы, но и трансцендентные (показательные, логарифмические, тригонометрические) уравнения, отделяя их тем самым (словом «алгебраические») от дифференциальных [8], интегральных, интегродифференциальных и прочих экзотических уравнений.

<sup>3</sup> Есть полотно, персонажи которых смотрят на вас, где бы вы не находились. Одно из них красочно и «страшно» описано Гоголем в повести «Портрет». Другой пример: два плоских зеркала, расположенные вертикально под прямым углом друг к другу (два зеркала трюмо, например), будут показывать вам ваше изображение при любом вашем расположении относительно такого «вогнутого» зеркала. При этом вы будете видеть себя с разворотом по горизонтали.

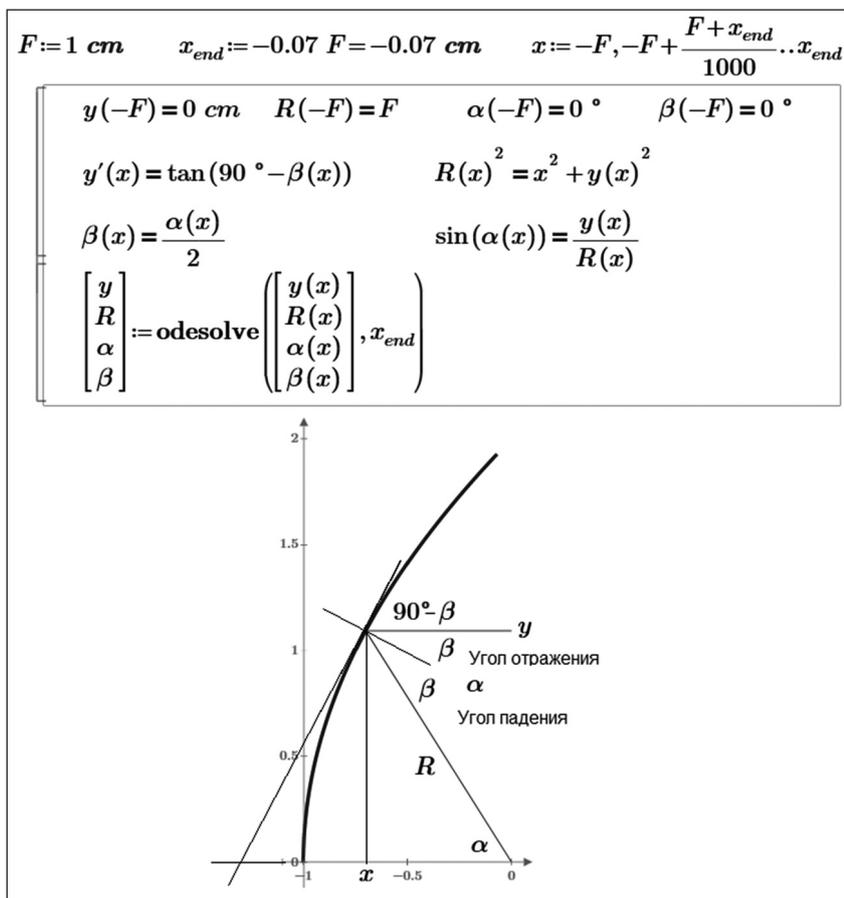


Рис. 4. Численное решение в среде Mathcad системы одного дифференциального и четырех алгебраических уравнений

Но вернемся к линзе из рассказа Карела Чапека и упомянем второе распространенное заблуждение, второй, так сказать, оптический обман<sup>1</sup>. Считается, что поверхности разного рода линз, фокусирующих лучи света, должны быть строго сферическими. На этом основаны многие задачи оптики: например, даны радиусы кривизны двух поверхностей линзы – найти ее фокусное расстояние и т.д. А сфера ли должны быть там, покажет следующая задача, сводящаяся также к решению дифференциального уравнения.

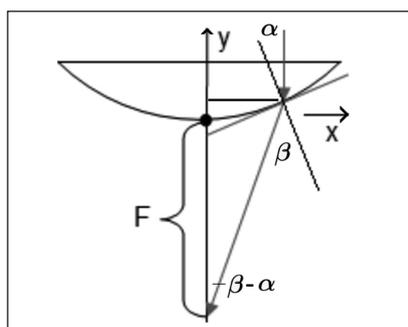


Рис. 5. Схема задачи о плоско-выпуклой линзе

На рис. 5 показана схема задачи о плоско-выпуклой линзе, выполненной из прозрачного материала с коэффициентом преломления  $n$ . Спрашивается, какой формы должна быть нижняя поверхность линзы, чтобы параллельный пучок света, сошедший в *фокусе*, отстоящем от начала координат на *фокусном расстоянии*  $F$ . Мы плоскую сторону линзы специально повернули вверх для упрощения задачи. Но несложно найти решение и для линзы, повернутой плоской стороной вниз. В этом случае нужно будет рассматривать преломление луча света не один, а два раза – на границах «воздух-стекло» и «стекло-воздух»<sup>2</sup>. В случае, показанном на рис. 5, преломления света

<sup>1</sup> Есть миниатюра Даниила Хармса под таким названием, написанная в стиле абсурда.

<sup>2</sup> В прошлом веке во многих семьях были большие линзы с четырьмя границами раздела сред «воздух-стекло (вернее, оргстекло)», «воздух-жидкость», «жидкость-стекло» и «стекло-воздух». Их ставили перед телевизорами, экраны которых в те времена были чуть больше почтовой открытки (см. <https://www.ptcusercommunity.com/thread/130193>). Наполняли же эти линзы дистиллированной водой или глицерином, у которого коэффициент преломления выше. Глицерин из этих линз мальчишки воровали для еще одних уличных пиротехнических опытов – его подливали в марганцовку, которую «заимствовали» из домашних аптек.

на верхней поверхности нет. Можно также рассчитать форму одной из поверхностей двояковыпуклой линзы, задав форму другой поверхности. Наш подход годится и для системы линз, установленных, например, в микроскопе или телескопе.

Для упрощения задачи мы также намерено сделали луч света не горизонтальным (как в задаче о зеркале), а вертикальным. Но обычно все оптические расчеты иллюстрируются схемами с горизонтальной оптической осью. И это неспроста. Оптик-экспериментатор собирает оптическую систему на оптической скамье именно в горизонтальном положении.

Решение задачи о линзе показано на рис. 6. Она сводится к системе одного дифференциального уравнения (производная равна тангенсу угла наклона касательной) и двух алгебраических уравнений. Первое – это математическая запись закона Снелла (его подробнее коснемся ниже) с коэффициентом преломления  $n$ , а второе выражает тангенс «нижнего» угла  $\beta - \alpha$  в виде отношения длины противолежащего катета  $x$  к длине прилежащего катета  $F + y(x)$ .

На рис. 6 кривая, являющаяся границей осевого сечения линзы и полученная при решении системы уравнений, дополнена пунктирной дугой окружности, проходящей через три точки: через начало координат и два края линзы. Вывод: линза, которая должна сфокусировать параллельный пучок света в точке, не имеет сферической формы, она, как говорят оптики, *асферическая*. А какая это форма (асфера – несфера) – это отдельный вопрос! Тем не менее, почти вся школьная и вузовская оптика как часть учебной дисциплины «Физика» основана на допущении, что линзы имеют сферические поверхности, а сам процесс обучения направлен не на

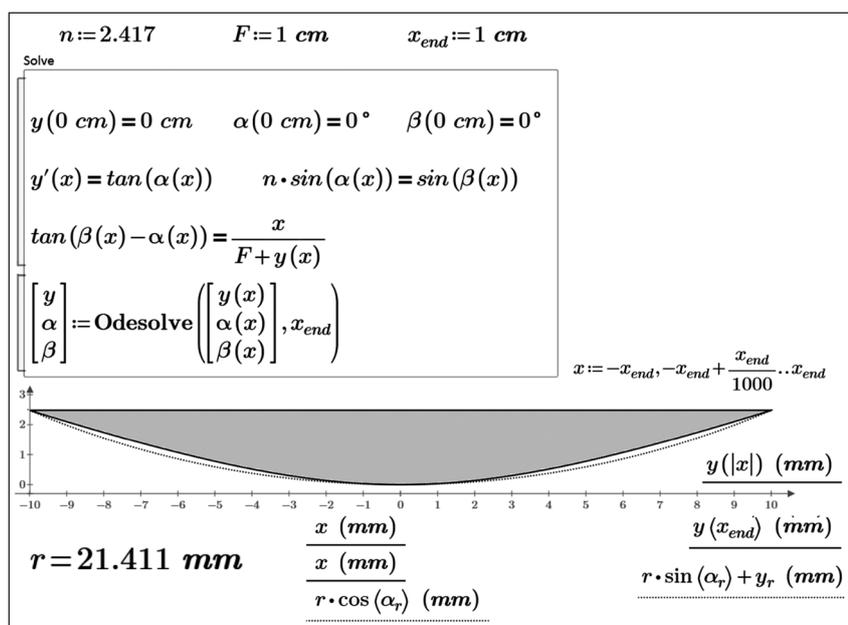


Рис. 6. Решение задачи о линзе

изучение базовых понятий оптики, а на заучивание готовых формул для расчета фокусных расстояний, диоптрий, коэффициентов увеличения/уменьшения, aberrаций и прочих сугубо профессиональных оптических характеристик и явлений.

Если при решении оптических задач с линзами допустить, что синус<sup>1</sup> и тангенс угла равны самому углу (а это, как известно, можно делать при малых значениях углов<sup>2</sup>), то решение существенно упрощается и, главное, становятся доступными многие аналитические и матричные решения, на которых базируются большинство оптических формул, которыми «мучают

бедных школьников и студентов». Так на рис. 7 показано, что замена синусов углов в уравнении Снелла на сами углы, позволяет свести четыре уравнения из рис. 6 к одному дифференциальному уравнению, которое несложно решить аналитически с помощью математического пакета Maple, а также, конечно, и численно в среде Mathcad. Но такую замену, повторяем, можно делать только в случае рассмотрения небольших углов преломления<sup>3</sup>, при небольших отношениях диаметра линзы к ее фокусному расстоянию т.е. при не слишком выпуклых линзах. Это показано на графиках рис. 7, где прорисованы четыре кривые:

две пары полностью совпадающих кривых (одна внутри другой) численного  $y(x)$  и аналитического  $y_s(x)$  решений полного  $y_1(x)$  и упрощенного  $y_2(x)$  дифференциальных уравнений. В середине эти пары кривых совпадают: не очень выпуклая линза с большим фокусным расстоянием имеет форму, близкую к сфере или эллипсоиду (квадратный корень от квадрата  $x$  плюс константа). Короткофокусная же линза по краям плавно переходит в конус, т.к. функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  имеют асимптоты. Их нахождение показано на сайте <https://www.ptcusercommunity.com/message/433835>.

Мы использовали два метода решений оптических задач – численный с помощью Mathcad-функции Odesolve и аналитический через сайт wolframalpha.com (рис. 2) и пакет Maple (рис. 7). Но есть еще и третий способ – хитрый и ленивый. Можно задачу разместить на сайте PTC Community/Mathcad и ждать, когда ее кто-нибудь решит. Так была получена «страшная» формула для  $y_{1s}(x)$  на рис. 7. По ней рассчитывается профиль фокусирующей линзы без замены синусов на их углы. Эту формулу (аналитическое решение сложного дифференциального уравнения) вывел один пользователь Mathcad Лук Мекес (Luc Meekes) из Голландии – родины великого Христиана Гюйгенса, внесшего большой вклад в развитие и оптики – см. <https://www.ptcusercommunity.com/thread/130129>. У этого человека была старая добрая 11-я версия Mathcad с символьным движком от Maple, а не от MuPAD, что и позволило решить задачу.

Кроме тригонометрического в наших расчетах присутствовали и другие важные допущения: коэффициент преломления света  $n$  мы рассматривали как константу, не зависящую ни от длины волны луча света (явление хроматической aberrации), ни от интенсивности светового потока, ни от положения луча в преломляющей субстанции. Но тут в пору вспомнить стеклянную призму, которая расщепляет белый свет на цветные составляющие и помогает, например, определять состав вещества методами спектроскопии. Это позволило, например, найти гелий сначала

<sup>1</sup> Синус тут возникает из-за физической интерпретации закона Снелла: коэффициент преломления – это отношение скоростей света в двух граничащих средах, который в свою очередь базируется на оптическом принципе Ферма: луч света пробивает свой путь так, чтобы время перемещения между двумя точками было минимально. Отсюда и излом на границах двух сред. На авторском сайте <https://www.ptcusercommunity.com/videos/2284> можно увидеть анимацию процесса минимизации... времени бега человека по газону и пашне с изломом на их границе. Мальчик-поджигатель из рассказа Чапека после установки лупы на чердаке дома должен был убраться из этой деревни не только подальше, но и за минимальное время, чтобы как можно скорее обеспечить себе алиби: ведь солома могла воспламениться раньше намеченного срока. Если опираться на принцип Ферма, то задачи о зеркале и линзе можно свести к решению не дифференциальных, а алгебраических уравнений. Это, например, описано в Фейнмановских лекциях по физике. Но этот знаменитый учебник писался в те времена, когда не было простых и доступных средств решения дифференциальных уравнений.

<sup>2</sup> Такое допущение делается при рассмотрении математического маятника, нить которого отклоняется от горизонтали на угол, значение которого не превышает 5–7 градусов.

<sup>3</sup> Есть шутники-математики, которые утверждают, что пиво – это не совсем алкогольная продукция, т.к. крепость этого напитка не превышает 5–7 градусов. При таких градусах синус почти эквивалентен своему углу, а пиво почти эквивалентно воде – своему основному ингредиенту.

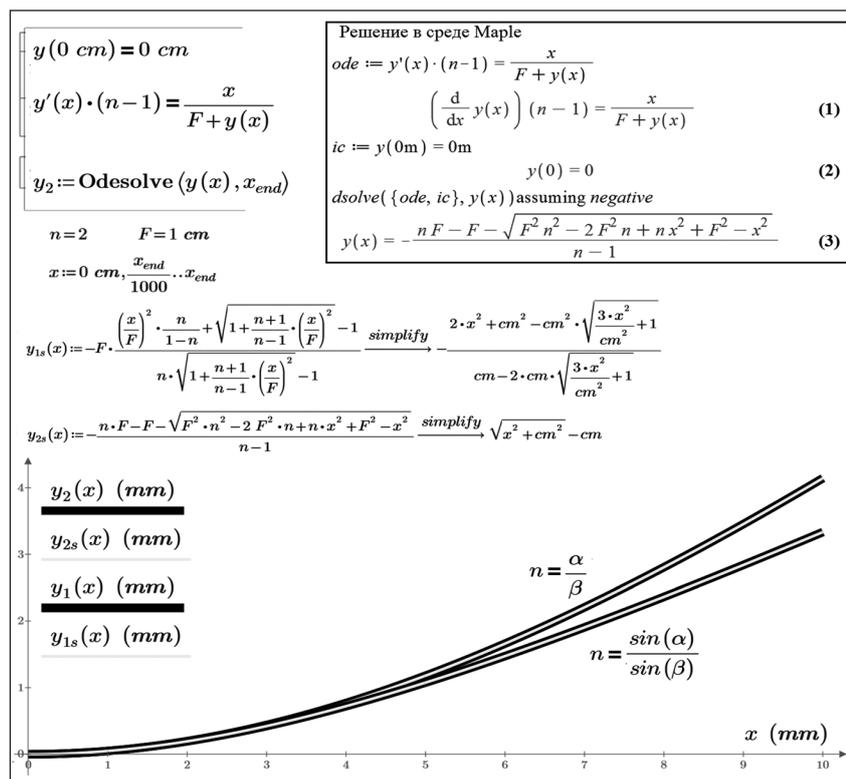


Рис. 7. Численные и аналитические решения полного и упрощенного дифференциального уравнения линзы

на Солнце, а только потом в атмосфере Земли. О всем этом можно почитать, например, здесь [9, 10]. Нужно всегда помнить о том, что реальные линзы сводят пучок солнечного света не в точку, а в некий радужный сгусток световой энергии, который тоже может подпалить деревянную поверхность. Да и сами источники света (Солнце или вольтова дуга в прожекторе), это далеко не точки.

## Выводы

Оптикой «пропитаны» не только учебники и задачки по физике, но и художественная литература. Добавим к Карелу Чапеку и Алексею Толстому пушкинское «Всё хлопает. Онегин входит, / Идет меж кресел по ногам, / Двойной лорнет скользя наводит / На ложи незнакомых дам.». Или рассказ Василия Шукшина «Микроскоп», а также басню Крылова «Мартышка и очки!». Да что там далеко ходить! Глаза, через которые человек получает львиную долю информации об окружающем мире (читает, например, эту статью), это ни что иное, как совершеннейшие оптические приборы, которые мы часто подправляем и усиливаем

другими подобными устройствами: моноклем, лорнетом, пенсне, очками, подзорной трубой, биноклем, перископом, микроскопом, телескопом и т.д. Сочетая математику, физику и литературу (базовые школьные предметы) с современными информационными технологиями, можно успешно и, главное, с интересом решать довольно сложные оптические задачи, попутно изучая

законы математики, физики и... литературного творчества.

Современные компьютерные средства позволяют отказаться от многих упрощений и более точно рассчитывать оптические приборы. Это можно делать не только с помощью специализированных программ для расчета оптических систем (TracePro, OPTIS, LightTools и др.), но и в среде математических программ, а также с помощью сайтов Интернета и специалистов, работающих на профессиональных форумах. А начинать изучение оптики можно и нужно не с заучивания готовых формул, зачастую малопонятных из-за принятых в них допущений и упрощений, о которых стыдливо умалчивают, а с генерирования на компьютере базовых положений оптики, переходя затем к упрощенным формулам. Что мы и попытались сделать в этой статье.

Есть такой жанр концертной деятельности «Музыкально-литературная композиция». Школьников в выходные дни вместо того, чтобы отпустить погулять со сверстниками или посидеть с лупой на весеннем солнышке (см. выше), усаживают в душном зале, где чтец-декламатор под заунывную музыку заунывным голосом читает заунывное литературное произведение<sup>2</sup>. Возвращаясь к названию статьи, можно предложить новый жанр концертной деятельности «Литературно-физическая компо-

<sup>1</sup> У предка одного из авторов статьи была фамилия Степанов. Этот пра...прадед был «первым парнем на деревне», кто надел очки, что стало поводом для смены фамилии с довольно распространенной (полдеревни ее носило) на свежую, необычную.

<sup>2</sup> «Заунывность в кубе» – это, конечно, с точки зрения большинства нормальных школьников. Их же родители-бабушки-дедушки, плотно опекающие своих чад, думают, естественно, иначе. Во времена «детства-отрочества-юности» первого автора статьи наблюдалась другая крайность: дети росли «как трава под забором» – почти без родительского надзора и делали на улице что хотели. Нравы в этих детско-юношеских сообществах были весьма дикими, жестокими, а порою и извращенными. Ведь смотреть за детьми было не кому – родители и бабушки с дедушками работали с утра до ночи как проклятые. Даже суббота была рабочим днем. Школа же насквозь была пропитана ложью – говорили одно, а делали совсем другое. Одна была отдушина – математика, физика, техническое творчество в кружках и несоветская литература. Отсюда наверно и проистекают многие беды бывшего Союза и современной России – дикие, жестокие и извращенные нравы детей переходят в их взрослую жизнь. Многие вполне обосновано считают, что нам нужна лишь одна реформа – настоящая и честная реформа образования от детского сада до университета. Ничего другого (прихватизацию, например) больше делать не нужно, и через 10–15 лет вы не узнаете страну. Честные и воспитанные люди сами устроят свою судьбу без внутренних и внешних советчиков. А пока у нас очень часто (слишком часто) нечестные и необразованные люди кучкуются, пробиваются наверх и командуют нами – пример в сноске 1 на стр. 34. А мы не можем этому препятствовать.

зиция с элементами мемуаристики»: на сцене читаются отрывки из рассказов, повестей, романов, а на большом экране решаются задачи из этих литературных произведений. Но можно с такими «концертами» выступать прямо на уроках в школе и на лекциях в вузе. Насколько этот новый «школьно-вузовский жанр» будет «заунывным» зависит от методистов, преподавателей и самих декламаторов, некоторые из которых, кстати говоря,

имеют техническое образование (Александр Филипенко, например, окончивший Физтех) и могут понимать суть физико-математических проблем таких композиций.

И последнее.

У Карела Чапека в вышеотмеченных циклах есть два рассказа «Поэт» и «Рекорд». Пересказывать их содержание мы не будем, а отошлем читателя к Интернету, где эти и другие рассказы несложно найти. По мотивам первого рассказа можно

составить дифференциальное уравнение движения автомобиля [7, 11, 12 и <https://www.ptcusercommunity.com/videos/1699>] или программу расшифровки текста [13], а по второму – дифференциальное уравнение полета камня [14, <https://www.ptcusercommunity.com/videos/3221>]. С такими «литературно-физическими композициями» можно также выступать на сцене, в школе и вузе. Или опубликовать их в журнале. Что мы и попытались сделать.

## Литература

1. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А.* Программное уравнение или ФМИ // Cloud of Science. Т. 2, № 3. 2015. С. 473–515. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/PMI.pdf>
2. *Очков В.Ф.* Преподавание математики и математические пакеты // Открытое образование, № 2, 2013. С. 23–34. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/OchkovMath.pdf>
3. *Ochkov, V.F., Bogomolova, E. P.* Teaching Mathematics with Mathematical Software, Journal of Humanistic Mathematics, Volume 5 Issue 1 (January 2015), pages 265–285. URL: [http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/teaching\\_of\\_math.pdf](http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/teaching_of_math.pdf)
4. *Ochkov Valery, Look Andreas.* Math Lessons in Classical Literature // Journal of Humanistic Mathematics, Volume 5 Issue 2 (July 2015), pages 121–132. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/MathLit.pdf>
5. *Очков В.Ф.* Уроки математики и информатики на уроках литературы и наоборот // Методология и философия преподавания математики и информатики: материалы Международной науч.-практ. конференции, Минск, 24–25 апр. 2015 г. – Минск: Изд. центр БГУ, 2015. – 350 с. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Ochkov-Minsk-2015.pdf>
6. *Очков В.Ф.* Mathcad и некоторые тайны художественной литературы // Домашний компьютер. № 5. 2000. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Gerasim/Gerasim.htm>
7. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А., Писачич К.* Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // Cloud of Science. Т. 2, № 2. 2015. С. 177–215. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf>
8. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Мати Хейнлоо.* Решатели или Великолепная семерка Mathcad // Открытое образование. № 3. 2015. С. 37–50. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Solvers-OE.pdf>
9. *Попов Г.М.* Современная астрономическая оптика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1988.
10. *Русинов М.М.* Техническая оптика. М.: Издательство УРСС, 2010.
11. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П.* Это страшное слово дифуры... // Информатика в школе. № 1. 2015. С. 55–58. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/ODE-maket.pdf>
12. *Очков В.Ф., Писачич К.* Путешествие из Петербурга в Москву или Свет в конце туннеля // Информатика в школе. №4. 2015. С. 58–61. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tunnel-maket.pdf>
13. *Очков В.Ф.* Mathcad и криптография // Информатика в школе, № 10, 2013 г., С. 57–58. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/MATHCAD-CRYPTOGRAPHY.pdf>
14. *Очков В.Ф.* Задачи по физике: новый подход к решению // Открытое образование № 6, 2012 г. С. 12–19. URL: <http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/Physic-pdf.pdf>

В 2016 году издательство Лань планирует выпустить учебное пособие Очкова В. Ф., Богомоловой Е. П. и Иванова Д. А. «Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет», один из этюдов которой изложен выше.

В пособии будут изложены основы применения математических методов, современных вычислительных средств (Mathcad, SMATH и др.) и Интернета для решения типовых задач математики, физики, химии и других школьных и вузовских дисциплин. Рассматриваемые задачи затрагивают вопросы решения уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных), программирования, статистики, обработки изображений, криптографии, решения головоломок, создания анимаций кинематических и динамических объектов, нечеткой логики, нечетких множеств, оптимизации и др. Книгу можно рассматривать как пособие к новому зарождающемуся учебному курсу ФМИ, обрисованного в этой статье и объединяющего в школах и вузах преподавание информатики, математики, физики, химии, литературы и других дисциплин в эпоху всеобщей компьютеризации. Сайт книги <https://www.ptcusercommunity.com/groups/etudes>.

Книга будет полезна и интересна для школьников, студентов, аспирантов, преподавателей средних и высших технических учебных заведений и других специалистов, а также для всех, кто любит математику на компьютере.