

# Методика разработки электронных задач-тренажеров для формирования компетенции решения математических задач

**Цель исследования.** В эпоху четвертой промышленной революции высококвалифицированные кадры являются важным фактором роста экономики, что накладывает серьезные требования к сформированности ключевых и предметных компетенций у выпускников высших учебных заведений. При этом математическая компетенция, необходимая для решения передовых и наукоемких задач, играет особенно важную роль. Учитывая увеличение доли электронного и дистанционного обучения в вузе, необходимо усиленно развивать методику формирования математической компетенции в электронной среде и создавать на ее основе эффективные инструменты обучения. Текущий уровень цифровизации образования уже позволяет достаточно качественно реализовывать самостоятельную работу студентов в электронной среде. В литературе довольно широко представлены различные методы и инструменты, направленные на формирование когнитивного компонента компетенций, однако вопрос формирования прагматического компонента в электронной среде пока слабо изучен. Целью данного исследования является разработка методики создания электронных задач-тренажеров, позволяющей формировать практический компонент математической компетенции — компетенцию решения математических задач.

**Материалы и методы.** В качестве методологической базы исследования выступил сравнительно-сопоставительный анализ научно-методической литературы, нормативно-методических документов, профессиональных и федеральных образовательных стандартов высшего образования. Разработка модели электронной задачи-тренажера проводилась методами структурного моделирования. Апробация предложенной методики и подтверждение её результативности происходили в ходе педагогического эксперимента с использованием методов статистического анализа.

**Результаты.** Предложена методика разработки электронных задач-тренажеров для формирования компетенции решения математических задач, основанная на существующих подходах

к формализации принципов решения задач. В представленной структурной модели электронной задачи-тренажера аспекты решения задачи, которые были выявлены ранее другими авторами, дополнены контекстным аспектом. Он позволяет связать задачу с изучаемым в настоящий момент теоретическим материалом и, по возможности, будущей профессиональной деятельностью студента. Предложенная методология организации обратной связи в задаче-тренажере за счет элементов тьюторинга способствует формированию у студентов метакогнитивных навыков.

**Заключение.** На основе предложенной методики разработаны 8 электронных задач-тренажеров для курса «Теория вероятностей и математическая статистика», которые были апробированы в учебном процессе Сибирского федерального университета. Оценка эффективности использования задач-тренажеров для формирования компетенции решения математических задач производилась в ходе педагогического эксперимента. Целью эксперимента было исследовать влияние задач-тренажеров на сформированность компетенции решения математических задач по соответствующим темам курса. На основе критерия Стьюдента для независимых выборок и критерия Манна-Уитни было подтверждено, что применение задач-тренажеров, разработанных на основе предложенной методики, позволяет повысить эффективность формирования прагматического компонента математической компетенции. В перспективе предложенную методику можно включить в комплекс средств обучения для формирования математической компетенции в электронной среде.

**Ключевые слова:** математическая компетенция, компетенция решения математических задач, формализация решения математических задач, электронная задача-тренажер, структурная модель, обратная связь, педагогический эксперимент, электронное обучение.

Tatiana A. Kustitskaya, Roman V. Esin

School of Space and Information Technology, Siberian Federal University, Krasnoyarsk

## Design Methodology for Electronic Training Problems Aimed at Development of Mathematical Problems Solving Competence

**The aim of the study.** The fourth industrial revolution demands highly qualified personnel as important factor of economic growth, which imposes serious requirements on the formation of key and subject competencies among graduates of higher educational institutions. A particularly important role is assigned to the mathematical competence which is required to solve complex and science-intensive problems. Given the growing share of e-learning and distance learning at the university, it is necessary to intensively develop the methodology for mathematical competence formation in the electronic environment, and create effective teaching tools on its basis. The current level of digitalization of education already allows organizing independent work of students in the electronic environment at a sufficiently high level. In the literature we can find various methods and tools,

aimed at the formation of the cognitive component of competencies. However, the issue of skills' development in the electronic environment is still underrepresented. The purpose of this study is to develop a methodology for creating electronic training problems, which aims at forming a practical component of mathematical competence — the competency of solving mathematical problems.

**Materials and methods.** In the study we performed a comparative analysis of scientific and methodological literature, regulatory and methodological documents, as well as professional and federal educational standards of higher education. The development of a model of electronic training problems was carried out using methods of structural modeling. The developed methodology was implemented in the educational process, and the confirmation of its effectiveness

was obtained by statistical analysis of the results of the pedagogical experiment.

**Results.** We proposed a methodology for electronic training problems development aimed at formation of mathematical problems solving competency. The methodology is based on existing approaches to problem solving formalization. In the presented structural model of an electronic training problem, the aspects of problem solving discovered earlier by other authors, are supplemented by the contextual aspect. This aspect is intended for linking the regarded problem with the material, studied at the moment and, if possible, with future professional activity of a student. The proposed methodology for organizing feedback in an electronic training problem contributes to the formation of metacognitive skills among students through the elements of tutoring.

**Conclusion.** On the basis of the proposed methodology, 8 electronic training problems were developed for the course "Probability and Mathematical Statistics" and tested in the educational process of the

Siberian Federal University. The effectiveness of the electronic training problems for the development of mathematical problems solving competency was assessed in the course of a pedagogical experiment. The purpose of the experiment was to study the impact of the electronic training problems in the competency formation for particular topics of the course. Using student's test for independent samples and the Mann-Whitney test we confirmed that the designed electronic training problems positively affect the formation of mathematical problems solving competency. In the future, the proposed methodology can be included in the teaching toolkit for the formation of mathematical competence in an electronic environment.

**Keywords:** mathematical competence, mathematical problems solving competency, formalization of mathematical problems solving, electronic training problem, structural model, feedback, pedagogical experiment, e-learning.

## Введение

Цифровизация мышления и четвёртая промышленная революция стремительно меняют все сферы деятельности человечества, что рождает новые вызовы и задачи, которые необходимо решать. Цифровые двойники, искусственный интеллект, большие данные — все это стало частью текущей реальности и применяется в трансформации экономики и промышленности страны. Для того, чтобы не отстать в быстро меняющемся информационном пространстве современные специалисты должны быть хорошо подготовлены в фундаментальных науках, лежащих в основе технологий новой промышленной революции. Так, поиск возможных решений в области задач создания цифровых двойников, развития технологий искусственного интеллекта и анализа больших данных невозможен без высокого уровня сформированности математической компетентности у выпускников вуза.

Математическое образование является фундаментальным, что отчасти определяется универсальностью математических методов, используемых во всех видах профессиональной деятельности специалистов различных направлений: научно-исследовательской, производственно-технологической, конструкторской, организационно-управленческой и педагогической [1]. Направления

развития математической подготовки в высшей школе, заложенные в Концепции развития математического образования в РФ, нашли свое отражение как в обновленных федеральных образовательных стандартах, так и в профессиональных стандартах. Особенно важным становится формирование математической компетентности, так как она является основой для решения существующих научных проблем, и поэтому отражена в профессиональных стандартах через формулировки трудовых действий, необходимых умений и знаний. В качестве примера в табл. 1 приведены некоторые выдержки из профессиональных стандартов инженеров, связанные с математической компетентностью.

Международные стандарты подготовки инженеров также отмечают важность математической компетентности. Например, международная инициатива CDIO в 2020 году пересмотрела существующие стандарты для ориентации подготовки выпускников, и к существующим основным двенадцати стандартам добавила еще четыре, отражающие тренды развития инженерного образования. В частности, был добавлен стандарт «Математика и моделирование» [2], что в очередной раз доказывает актуальность формирования математической компетентности у современных выпускников. Также Международным инженерным альянсом опреде-

ляются ключевые результаты обучения выпускников, которые должны формироваться в процессе обучения. Одним из таких ключевых результатов становится способность проводить исследования для решения комплексных инженерных задач с использованием математических методов [3].

Современный уровень цифровизации образования уже позволяет частично формировать компетенции средствами электронной среды не только в рамках контактной работы со студентами, но и в рамках самостоятельной работы. В отечественной и зарубежной литературе существует множество работ, в которых описывается успешная методика разработки учебных курсов/элементов для передачи знаниевого компонента (теоретического материала) обучения [4–6]. В настоящее время существуют отдельные способы формирования праксиологического компонента компетенций (умений и навыков) для технических направлений обучения, но пока слабо изучен вопрос их формирования в электронной среде. Поэтому важной задачей специалистов в области электронных образовательных технологий становится разработка инновационных методик формирования умений и навыков посредством электронного обучения.

Отметим, что в области электронного обучения математике прослеживается явное противоречие между существующими

## Обзор профессиональных стандартов

Table 1

## Overview of professional standards

Профессиональный стандарт	Формулировки необходимых умений	Формулировки необходимых знаний
06.001 Программист	– использовать методы и приемы формализации задач; – использовать методы и приемы алгоритмизации поставленных задач; – применять стандартные алгоритмы в соответствующих областях.	– методы и приемы формализации задач; – алгоритмы решения типовых задач, области и способы их применения.
06.003 Архитектор программно-го обеспечения	– описывать и использовать математические методы; – проводить исследования и анализ.	– математические методы, в том числе допущения и ограничения.
06.022 Системный аналитик	– применять формальную логику для анализа и построения высказываний.	– основы формальной логики.
06.028 Системный программист	– оценивать вычислительную сложность алгоритмов функционирования разрабатываемых программных продуктов.	– основы применения теории алгоритмов; – методы обработки данных.
06.042 Специалист по большим данным	– осуществлять математическое и информационное моделирование.	– теория вероятностей и математическая статистика; – математическое моделирование – существующие и перспективные математические методы и инструментальные средства анализа больших данных.
25.027 Специалист по разработке аппаратуры бортовых космических систем	– применять методы математического моделирования при выполнении расчетов для разработки функциональных узлов.	– методы составления адекватных имитационных математических моделей электрорадиоизделий.
28.006 Специалист по оптимизации производственных процессов	– анализировать статистические данные по работе участков изготовления деталей и узлов тяжелого машиностроения.	– методология функционального моделирования; – методики обработки статистических данных.
40.040 Инженер в области разработки цифровых библиотек стандартных ячеек и сложно-функциональных блоков	– проводить минимизацию логической функции.	– физические и математические модели основных элементов электрических схем; – методы построения моделей; – моделирование и верификация моделей.

возможностями организации обучения математике в электронной среде и отсутствием результативной методики этого обучения, позволяющей формировать практическую сторону математической компетентности. Разрешением данного противоречия может стать методика разработки задач-тренажеров, представленная в данной статье, позволяющая формировать компетенцию решения математических задач в электронной среде.

### 1. Способность решать математические задачи с точки зрения компетентностного подхода

Компетентностный подход к определению результатов обучения пришел на смену традиционной для советской системы образования триаде «знания умения-навыки»

(ЗУН) с момента присоединения РФ к Болонскому процессу в 2003 г. и закреплён в настоящее время в федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС). Компетенция и компетентность, основные составляющие этого подхода, являются понятиями более высокого уровня, нежели знания, умения и навыки, включая их в себя в качестве одной из базовых ступеней [7].

Следует отметить, что понятия компетентности и компетенции зачастую используются в научной литературе и в нормативных документах синонимически. На этот факт указывает, например, Лютнер [8], анализируя оценочные средства таких программ по оценке образовательных достижений учащихся как PISA, TIMSS и PIRLS, а также Зимняя [9], анализируя тексты ФГОС. При этом многие исследователи разграничивают

понятия компетентности и компетенции – различные подходы к их определению можно встретить в [9–11].

В иерархии компетентностей самый высокий уровень занимают ключевые (базовые, универсальные) компетентности, а предметные компетентности (т.е. способности, необходимые для эффективного выполнения определенных действий в определенной предметной области) выступают как конкретизации ключевых [10, 12]. Это позволяет сделать вывод, что через формирование предметных компетенций можно в той или иной мере формировать ключевые.

Обратимся теперь к понятиям математической компетентности и математических компетенций, и их месту в упомянутой выше иерархии. В рекомендациях Совета Европейского Союза [13], математи-



ческая компетентность названа одной из ключевых компетентностей непрерывного образования и определяется как способность развивать и применять математическое мышление и проницательность для решения ряда проблем в повседневных ситуациях, а также использовать математические представления (формулы, модели, конструкции, графики, диаграммы).

В работе [12] авторы предлагают разбить математическую компетентность на три основные составляющие: практическая компетентность, которая включает конкретные математические умения и навыки; общекультурная компетентность, которая включает междисциплинарные связи математики с различными областями человеческой жизни; социально-личностная компетентность, которая широко интерпретируется: от способности к коммуникации с использованием математического языка до умения искать, отбирать, анализировать, систематизировать, классифицировать математическую информацию.

В работе [14] под математической компетентностью авторы понимают способность адекватно применять математику в любых контекстах для решения любого типа задач. При этом они предлагают следующую структурную модель: *математическая компетентность есть конструктор из математических компетенций*. А математическая компетенция представляет собой сознательную готовность использовать те или иные аспекты математики для решения проблем определенного типа.

В работе [15] *математическая компетентность понимается как результат освоения математической компетенции*, ее практическая реализация, что по сути является проекцией определения Хуторского.

Несмотря на отсутствие устоявшихся определений и иерархии понятий, очевидно, что предмет нашего исследо-

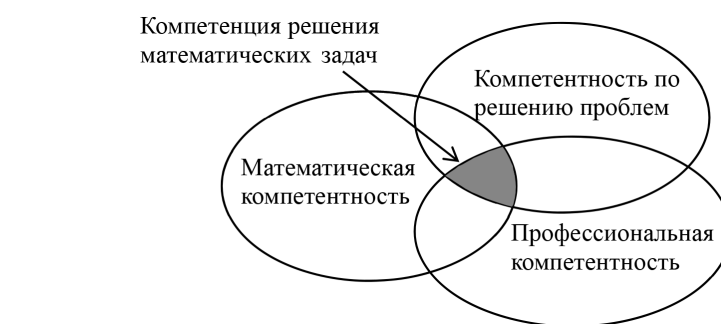


Рис. 1. Компетенция решения математических задач в иерархии компетентностей

Fig. 1. Competence of solving mathematical problems in the hierarchy of competencies

вания — *способность решать математические задачи — это одна из важнейших составляющих математической компетентности*. Кроме того, ее можно рассматривать и как одну из составляющих базовой компетентности в области решения проблем («problem solving competence»), которая считается одной из ключевых компетентностей 21 века [16]. Бакстер и Глейзер [17] определяют данную компетентность как совокупность следующих компетенций: способности определять и формулировать проблему, способность выбирать и реализовывать стратегии решения проблемы, способность оценивать и объяснять результат, способность осуществлять самоконтроль.

Как отмечают авторы в работе [18], обучение решению математических задач — эффективнейший инструмент для формирования этой ключевой компетентности, поскольку математические задачи требуют применения критического мышления, способности к формализации, гибкости при выборе формы мышления и стратегий решения — всего того, что составляет суть математического мышления.

Способность решать математические задачи в том или ином виде фигурирует и в профессиональных компетенциях. Так, например, математическое моделирование процессов и объектов на базе пакетов

прикладных программ, исследование и проведение экспериментов по заданной методике, и анализ их результатов фигурируют в качестве профессиональных задач выпускников бакалавриата информационно-технических направлений [19]. Таким образом, можно считать, что компетенция решения математических задач находится на пересечении математической компетентности, компетентности по решению проблем и профессиональной компетентности (см. рис. 1).

Несмотря на то, что электронное обучение прочно вошло в практику образовательных учреждений, возможности применения электронной среды для формирования математической компетентности и, в частности, способности решать математические задачи остаются слабо изученными [19]. Создание методики формирования этой компетенции с помощью электронных средств обучения позволит внедрить в учебный процесс эффективные средства обучения, нацеленные на формирование компетенции решения математических задач в рамках самостоятельной работы.

#### Подходы к формализации принципов решения математических задач

При обучении студентов решению математических задач в рамках контактной ра-

боты преподаватель и студент не ограничены в средствах, используемых для работы над задачей, однако в случае поручения функций преподавателя электронной обучающей системе подобная гибкость и возможность персонализации системы «преподаватель-студент» уже будет невозможна — обучающая система может действовать только согласно прописанному для нее алгоритму. Поэтому важно максимально *формализовать процесс решения задач и выявить наиболее универсальную и эффективную последовательность действий в работе над задачей*

Пионером в систематизации принципов решения задач можно считать Д. Пойа, который в своей книге «How to solve it» [20] предлагает при обучении решению задач придерживаться следующей последовательности:

1. Понимание задачи («Что дано? Что неизвестно? Какие заданы условия?»).

2. Выработка плана решения («Знаете ли вы похожие задачи? Как можно использовать данные и условия?»).

3. Выполнение плана («Можете ли вы обосновать правильность выполненного шага?»).

4. Верификация результата и подведение итогов («Не противоречат ли полученные результаты каким-либо условиям? Можно ли было получить эти результаты другим способом? Для чего можно применить полученный результат?»).

В работе [21] рассматривается следующая модель решения задачи, названная авторами «IDEAL». Это название представляет собой аббревиатуру, сформированную по первым буквам названий этапов решений.

1. Identify — определение проблемы.

2. Define — постановка задачи, определение целей.

3. Explore — рассмотрение вариантов или стратегий, ко-

торые могут быть использованы для достижения этих целей.

4. Act — реализация выбранной стратегии.

5. Look back — оценка эффективности выбранной стратегии и достижения целей.

Рассмотренные выше схемы могут считаться абстрактной, внеконтекстной формализацией процесса решения задачи, так как в ней не учитываются:

— связь конкретной рассматриваемой задачи с другими задачами данной предметной области;

— обращение обучающегося с своим предыдущему опыту;

— мотивационные аспекты и др.

В частности, из-за отсутствия в моделях контекста их можно считать универсальными, применимыми к решению задач разной степени абстракции в различных областях знаний. Математические задачи — это всего лишь один из типов задач, к которым данные схемы можно применить.

Р. Майер [22] предлагает следующую формализацию процесса решения математической задачи, уточняя первый этап схемы Д. Пойа («Понимание задачи») таким образом, чтобы учесть обращение обучающегося к своему предыдущему опыту и особенностям предметной области:

1. Понимание задачи:

— *Лингвистический аспект понимания задачи.* Студент осознает значение отдельных слов в условиях задачи и имеющиеся между ними связи, переводит текст задачи на язык математики, находя в нем переменные, математические выражения, составляя уравнения и неравенства.

— *Семантический аспект понимания задачи.* Студент вспоминает единицы и шкалы измерения величин, известные ему факты о фигурирующих в задаче объектах, которые нужны для понимания смысла задачи и выстраивания некоторых связей.

— *Схематический аспект понимания задачи.* Студент вспоминает типы задач, встречающиеся в данной предметной области, относит решаемую им задачу к одному из этих типов и, возможно, подбирает шаблон решения задачи.

2. Решение задачи:

— *Процедурный аспект решения задачи.* Студент реализует алгоритмы проведения простейших операций из предметной области, например, арифметических операций, упрощения выражений, решения уравнений.

— *Стратегический аспект решения задачи.* Студент планирует ход решения задачи, декомпозирует цели на подцели.

Приведенная формализация Р. Майера является комплексной и легко алгоритмизируемой. Необходимо разработать средство обучения в электронной среде, которое позволит формировать компетенцию решения математических задач с опорой на данную формализацию. В качестве естественного средства обучения решению математических задач нам видится электронный тренажер.

## 2. Электронный тренажер как средство обучения

Понятие «тренажер» используется в педагогической среде в разных контекстах, в которых смысл понятия может существенно отличаться. В более общем случае под тренажерами и симуляторами понимаются средства, методы и формы обучения, способствующие приобретению знаний, формированию и закреплению навыков [23]. В данном случае не происходит разделения на физический или электронный вариант реализации тренажера: это могут быть различные технические средства, позволяющие формировать отдельные категории профессиональных навыков (моторные, диагностические, алгоритмические и т.д.). Применение таких трена-

жеров жестко ограничено сферой подготовки выпускника и его специализацией, а разработка является дорогостоящей.

Развитие электронного обучения и его новых форматов, связанное с потребностью в учете особенностей поколения Z позволило выделить понятие «электронный тренажер». Под таким тренажером понимается комплекс заданий, который предназначен для самостоятельной оценки уровня усвоения знаний и навыков [24]. Иногда электронные тренажеры, при соответствующей организации, используются как средство развития творческой и познавательной инициативы [25].

В гуманитарных направлениях успешно применяют диалоговые тренажеры, позволяющие тренировать навыки публичной речи с различными собеседниками в различных ситуациях [26]. В работе [27] развивается идея диалоговых тренажеров, перенесенных в виртуальное пространство. Такая подготовка успешно применяется для обучения будущих педагогов посредством моделирования реального занятия в виртуальной среде с виртуальными учащимися. Но все же чаще всего тренажеры применяются для подготовки специалистов технического профиля. Различные варианты электронных тренажеров используются при подготовке студентов по дисциплине «Физическая химия» [28], технических специалистов в области пиротехники [29] и атомной отрасли [30].

В работах [31–33] были представлены тренажеры, нацеленные на запоминание студентами математических формул, однако применения подобных тренажеров было признано неэффективным.

Следует отдельно упомянуть об исследованиях эффективности применения тренажеров для формирования математических навыков. Так, работа [14] посвящена разработке и внедрению тренажеров по математи-

ческому анализу с применением технологии динамического тестирования в проблемной среде. Примеры реализации тренажеров по разделам дифференциальных уравнений как на основе собственного программного обеспечения [35], так и с применением технологий вычисляемых файлов Wolfram Alpha [36] показывают различный инструментарий для реализации тренажеров по математическим дисциплинам. Тренажеры кнопочного вида для курса высшей математики приводятся в работе [31], в которой отмечается, что качество формирования навыков в электронной среде оказывается не хуже, чем при традиционном формате обучения.

При всей важности упомянутых практических реализаций, ни в одной работе не представлена методика решения математических задач, которая бы опиралась на полный цикл работы над задачей, а также являлась бы универсально применимой ко всем математическим дисциплинам. Таким образом, разработка универсальной методики формирования компетенции решения математических задач в электронной среде могла бы внести существенный вклад в теорию и методику информатизации образования.

### **3. Методика формирования компетенции решения математических задач в электронной среде с помощью задач-тренажеров**

#### **Структурная модель задачи-тренажера**

В нашей работе при реализации процесса решения математической задачи в электронной среде согласно формализации Р. Майера в существующий набор аспектов решения задачи (лингвистический, семантический, схематический, процедурный, стратегический) были добавлено два: контекстный и аналитический

аспекты.

*Контекстный* аспект решения задачи является логическим продолжением семантического аспекта и формулируется следующим образом: студент сопоставляет условия задачи с изучаемым в данный момент теоретическим материалом, что необходимо для понимания математического базиса задачи и выстраивания связей. Для некоторых задач целесообразно включать микропорции теоретической информации, необходимой для решения задачи. В рамках контекстного аспекта можно связать задачу с профессиональной деятельностью, а также продемонстрировать реальное применение изучаемого теоретического материала в практических ситуациях. Таким образом, данный аспект позволяет реализовывать интеграцию различных математических областей, устанавливать связи между ними и практико-ориентированным контекстом предложенной задачи.

*Аналитический* аспект решения задачи позволяет провести сравнение полученного результата с фактическим условием задачи согласно последнему этапу схемы Д. Поиа. Сформулируем его так: студент проводит содержательный анализ полученного результата и проверяет выполнение ограничений задачи. Данный аспект важен для определения корректности решения и его пересмотра в случае наличия ошибок, а также осознания смысла полученного результата.

Представленная формализация была положена в основу при разработке задач-тренажеров в электронном курсе по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Компоненты электронной задачи-тренажера и их реализация в задаче-тренажере по теме «Математическое ожидание непрерывной случайной величины» приведены в табл. 2.

## Структурная модель задачи тренажера

Table 2

## Structural model of training problems

Компоненты электронной задачи-тренажера	Реализация в задаче-тренажере «Математическое ожидание непрерывной случайной величины»																				
Условие задачи	<p>Работница кондитерского цеха лепит пирожные «Картошка» в виде шариков. Согласно технологии для изготовления одного пирожного она должна взять <math>100 \text{ см}^3</math> сладкой массы и слепить из нее шарик. Работница отмеряет этот объем на глаз, зачерпывая сладкую массу ладонью. При этом она, разумеется, немного ошибается. Эта ошибка (погрешность измерения) <math>\varepsilon</math> имеет равномерное распределение на интервале от <math>-30 \text{ см}^3</math> до <math>20 \text{ см}^3</math>.</p> <p>Определите:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>средний радиус получающегося у этой работницы пирожного «Картошка»;</li> <li>радиус, который бы получался у пирожного, если бы работница отмеряла необходимый объем сладкой массы точно.</li> </ol>																				
Гиперссылки на специфические определения и понятия (лингвистический аспект)	<p>Эта ошибка (погрешность измерения) <math>\varepsilon</math> имеет равномерное распределение на интервале от <math>-30 \text{ см}^3</math> до <math>20 \text{ см}^3</math>.</p> <p>Гиперссылка на статью в глоссарии:</p> <p>Погрешность измерения — отклонение измеренного значения величины от её истинного (действительного) значения.</p>																				
Вопросы на знание свойств и параметров рассматриваемых в задачах объектов (семантический аспект)	<p>Выберите формулу для нахождения радиуса шара <math>R</math> по его известному объему <math>V</math></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Варианты ответа</th><th>Комментарий к ответу</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>R = \sqrt[3]{V}</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td><math>R = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}</math></td><td>Неверно</td></tr> </tbody> </table>	Варианты ответа	Комментарий к ответу	$R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$	Неверно	$R = \sqrt[3]{V}$	Неверно	$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	Верно	$R = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$	Неверно										
Варианты ответа	Комментарий к ответу																				
$R = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$	Неверно																				
$R = \sqrt[3]{V}$	Неверно																				
$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$	Верно																				
$R = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$	Неверно																				
Задания на определение математического базиса задачи (контекстный аспект)	<p>Случайная величина <math>R</math> (радиус пирожного) является...</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Варианты ответа</th><th>Комментарий к ответу</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Дискретной</td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td>Непрерывной</td><td>Верно</td></tr> </tbody> </table> <p>В задаче требуется найти...</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Варианты ответа</th><th>Комментарий к ответу</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Математическое ожидание <math>R</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td>Медианное значение <math>R</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td>Моду <math>R</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td>Дисперсию <math>R</math></td><td>Неверно</td></tr> </tbody> </table>	Варианты ответа	Комментарий к ответу	Дискретной	Неверно	Непрерывной	Верно	Варианты ответа	Комментарий к ответу	Математическое ожидание $R$	Верно	Медианное значение $R$	Неверно	Моду $R$	Верно	Дисперсию $R$	Неверно				
Варианты ответа	Комментарий к ответу																				
Дискретной	Неверно																				
Непрерывной	Верно																				
Варианты ответа	Комментарий к ответу																				
Математическое ожидание $R$	Верно																				
Медианное значение $R$	Неверно																				
Моду $R$	Верно																				
Дисперсию $R$	Неверно																				
Задание о математической записи условий задачи и/или вопроса задачи (лингвистический аспект)	<p>Объем получающегося у работницы кондитерского цеха пирожного — это случайная величина...</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Варианты ответа</th><th>Комментарий к ответу</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>100 +  \varepsilon </math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>100 \cdot \varepsilon</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>100 + \varepsilon</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td><math>100 - \varepsilon</math></td><td>Неверно</td></tr> </tbody> </table> <p>Математическое ожидание случайной величины «радиус пирожного» — это...</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Варианты ответа</th><th>Комментарий к ответу</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100 + \varepsilon)}{4\pi}}\right)</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td><math>M(100 \cdot \varepsilon)</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>M(\sqrt[3]{100 + \varepsilon})</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>\sqrt[3]{\frac{3(100 + \varepsilon)}{4\pi}}</math></td><td>Неверно</td></tr> </tbody> </table>	Варианты ответа	Комментарий к ответу	$100 +  \varepsilon $	Неверно	$100 \cdot \varepsilon$	Неверно	$100 + \varepsilon$	Верно	$100 - \varepsilon$	Неверно	Варианты ответа	Комментарий к ответу	$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100 + \varepsilon)}{4\pi}}\right)$	Верно	$M(100 \cdot \varepsilon)$	Неверно	$M(\sqrt[3]{100 + \varepsilon})$	Неверно	$\sqrt[3]{\frac{3(100 + \varepsilon)}{4\pi}}$	Неверно
Варианты ответа	Комментарий к ответу																				
$100 +  \varepsilon $	Неверно																				
$100 \cdot \varepsilon$	Неверно																				
$100 + \varepsilon$	Верно																				
$100 - \varepsilon$	Неверно																				
Варианты ответа	Комментарий к ответу																				
$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100 + \varepsilon)}{4\pi}}\right)$	Верно																				
$M(100 \cdot \varepsilon)$	Неверно																				
$M(\sqrt[3]{100 + \varepsilon})$	Неверно																				
$\sqrt[3]{\frac{3(100 + \varepsilon)}{4\pi}}$	Неверно																				



Компоненты электронной задачи-тренажера	Реализация в задаче-тренажере «Математическое ожидание непрерывной случайной величины»												
Задание на определение типа задачи и шаблона решения (схематический аспект)	<p>Для того, чтобы найти математическое ожидание случайной величины <math>R</math>, необходимо воспользоваться формулой...</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Варианты ответа</th><th>Комментарий к ответу</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>MR = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(R = x_i)</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>MR = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(R = x_i)</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>MR = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td><math>MR = F_R^{-1}(0.5)</math></td><td>Неверно</td></tr> </tbody> </table>	Варианты ответа	Комментарий к ответу	$MR = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(R = x_i)$	Неверно	$MR = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(R = x_i)$	Неверно	$MR = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$	Верно	$MR = F_R^{-1}(0.5)$	Неверно		
Варианты ответа	Комментарий к ответу												
$MR = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(R = x_i)$	Неверно												
$MR = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(R = x_i)$	Неверно												
$MR = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$	Верно												
$MR = F_R^{-1}(0.5)$	Неверно												
Задания на прохождение алгоритма, конкретизацию шаблона в соответствии с условиями задачи, Учет свойств изучаемых математических объектов (стратегический аспект)	<p>Чтобы вычислить <math>M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right)</math> нужно будет воспользоваться свойствами математического ожидания. Для каждого из приведенных ниже утверждений отметьте, являются они верными или нет</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Утверждение</th><th>Ответ</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot M(\sqrt[3]{100+\varepsilon})</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td><math>M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = M(\sqrt[3]{100+\varepsilon})</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{100+M\varepsilon}</math></td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td><math>M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \frac{1}{50} \sqrt[3]{100+\varepsilon} d\varepsilon</math></td><td>Верно</td></tr> <tr> <td><math>M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \sqrt[3]{100+\varepsilon} d\varepsilon</math></td><td>Неверно</td></tr> </tbody> </table>	Утверждение	Ответ	$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot M(\sqrt[3]{100+\varepsilon})$	Верно	$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = M(\sqrt[3]{100+\varepsilon})$	Неверно	$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{100+M\varepsilon}$	Неверно	$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \frac{1}{50} \sqrt[3]{100+\varepsilon} d\varepsilon$	Верно	$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \sqrt[3]{100+\varepsilon} d\varepsilon$	Неверно
Утверждение	Ответ												
$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot M(\sqrt[3]{100+\varepsilon})$	Верно												
$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = M(\sqrt[3]{100+\varepsilon})$	Неверно												
$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \sqrt[3]{100+M\varepsilon}$	Неверно												
$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \frac{1}{50} \sqrt[3]{100+\varepsilon} d\varepsilon$	Верно												
$M\left(\sqrt[3]{\frac{3(100+\varepsilon)}{4\pi}}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \sqrt[3]{100+\varepsilon} d\varepsilon$	Неверно												
Задания на проведение вычислений (процедурный аспект)	<p>Итак, для нахождения среднего радиус получающегося у этой работницы пирожного «Картошка», нам осталось вычислить <math>MR = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \frac{1}{50} \sqrt[3]{100+\varepsilon} d\varepsilon</math>. Это значение равно ...</p> <p>Ответ: 2.823 см.</p> <p>Теперь найдите радиус, который бы получался у пирожного, если бы работница отмеряла необходимый объем сладкой массы точно. Он равен...</p> <p>Ответ: 2.879 см.</p>												
Задание на анализ и интерпретацию полученного решения (аналитический аспект)	<p>Предположим, что покупатели пирожных не замечают различий в диаметре пирожных, меньших 5 мм по модулю. Если работница изготовит пирожное, радиус которого равен среднему радиусу, то покупатель...</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Варианты ответа</th><th>Комментарий к ответу</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>заметит, что пирожное меньше стандартного</td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td>заметит, что пирожное больше стандартного</td><td>Неверно</td></tr> <tr> <td>не заметит отклонений от стандартного размера</td><td>Верно</td></tr> </tbody> </table>	Варианты ответа	Комментарий к ответу	заметит, что пирожное меньше стандартного	Неверно	заметит, что пирожное больше стандартного	Неверно	не заметит отклонений от стандартного размера	Верно				
Варианты ответа	Комментарий к ответу												
заметит, что пирожное меньше стандартного	Неверно												
заметит, что пирожное больше стандартного	Неверно												
не заметит отклонений от стандартного размера	Верно												

Для реализации предложенной модели в электронной среде необходимо наличие следующего функционала:

**Последовательное открытие заданий.** Задания в тренажере представлены в виде отдельных задач, доступ к которым открывается последовательно. Это необходимо для того, что-

бы информация в каждом последующем задании не могла прямо или косвенно указать на правильный ответ предыдущего задания. В LMS Moodle имеется возможность ставить вопросы в зависимости друг от друга. В этом случае при прохождении задачи-тренажера у пользователя не будет воз-

можности увидеть следующий вопрос, пока не будет дан ответ на предыдущий. При этом важно, чтобы все задания располагались на одной странице и у пользователя не было проблем с обращением к результатам и вычислениям, полученным на предыдущих шагах решения задачи.



Несколько попыток прохождения задачи-тренажера. Обучающее воздействие задачи-тренажера проявляется только при наличии возможности исправлять свои ошибки, возникающие в процессе решения. Для этого электронная среда должна позволять проходить как всю задачу-тренажёр, так и отдельные его задания несколько раз. За счет обратной связи задача-тренажёр выполняет функции наставника или тьютора в электронной среде, сопровождая каждый шаг решения задачи подробными комментариями и последовательными подсказками, способствующими достижению правильного решения задания. Такие подсказки могут содержать:

- пояснения к каждому ответу;
- ссылки на глоссарий в электронном курсе с необходимыми формулами и понятиями;
- контрпримеры, опровергающие правильность выбранного решения задания;
- фрагменты теоретического материала курса.

### **Методология организации обратной связи в задаче-тренажере**

Обратная связь в электронном тренажере, будучи реализованной грамотно, способна мотивировать студентов и значительно повысить эффективность обучения [37, 38]. Отметим следующие важные функции обратной связи:

— *Формирование метакогнитивных*. Самооценка студентами результатов деятельности на основе обратной связи позволяет успешно формировать метакогнитивные стратегии деятельности [39].

— *Тьюторинг*. Электронный тренажер можно рассматривать как интерактивную игровую технологию обучения, в которой тренажер перенимает роль тьютора за счет своевре-

менной персонализированной обратной связи, указания на важные особенности задачи, подсказки и т.д. Именно такое согласованное посредничество позволяет развивать креативность и творческий подход для решения более сложных задач [34].

В своей работе Р. Майер [40] описывает результаты имитационного моделирования системы «учитель-ученик» (с помощью вероятностного автомата) и приходит к выводу, что обучение с «поощрением и наказанием» является наиболее эффективным с точки зрения скорости формирования навыков и максимального уровня их сформированности. Под поощрением в данном случае подразумевается сообщение ученику о правильности ответа и выставление высокой оценки, под наказанием — информирование о неправильности ответа и сообщение правильного. Относительно способа реагирования учителя на неправильные ответы ученика Майер выделяет четыре стратегии:

1. «Неверно, повторите еще раз ту же операцию».
2. «Неверно, правильно так. Повторите еще раз ту же операцию».
3. «Неверно. Повторите всю последовательность действий с начала задачи».
4. «Неверно. Правильно так. Повторите всю последовательность действий сначала».

С помощью имитационного моделирования процесса обучения, он обнаружил, что наиболее эффективным стратегиями являются стратегии 2 и 4.

Так, в предлагаемой нами модели задачи-тренажера выполнение последующего задания зачастую невозможно без получения правильного ответа на предыдущее задание, то для реагирования ЭОС на неправильные ответы больше подходит стратегия 2. Учитывая, что самостоятельное правильное решение задачи способствует

большей прочности приобретаемых умений и навыков, несколько изменим эту стратегию — вместо сообщения правильного ответа при первой же попытке выполнения задания, будем давать обучающемуся подсказки. Отклик ЭОС на неправильный ответ обучающегося может иметь вид «Неверно, попробуйте применить такой-то подход. Повторите еще раз ту же операцию» или «Неверно, ваша ошибка заключается в том-то. Повторите еще раз ту же операцию».

Рассмотрим варианты организации обратной связи для разных типов заданий электронной задачи-тренажера.

В заданиях на установление соответствий или в заданиях типа «Множественный выбор» важно не только подобрать варианты ответов, но и предоставить адресный отзыв к каждому из них. В идеале неверные варианты должны соответствовать наиболее распространенным ошибкам при решении данного типа задач, а отзывы к таким ответам — пояснять суть допущенных ошибок и предлагать студентам способы, как подобные ошибки отследить самостоятельно. Итоговый отзыв, который предоставляется студенту при исчерпании всех попыток выполнения задания, должен содержать правильный ответ и пояснения, как этот ответ может быть получен.

На рис. 2 приведен пример организации отзывов в заданиях типа «Множественный выбор».

Обратную связь в заданиях, предполагающих введение студентом числового ответа, можно организовать следующим образом:

— число попыток выполнения задания установить в зависимости от сложности задания и количества, совершаемых при его выполнении нетривиальных математических операций;

— при каждой неправильной попытке предоставлять студен-

Объем получающегося у работницы кондитерского цеха пирожного - это случайная величина...

Выберите один ответ:

☐ a.  $100 + |\varepsilon|$

Неверно. Обратите внимание, что работница может ошибаться как в большую, так и в меньшую сторону. Объем шарика во втором случае будет менее  $100\text{см}^3$

☐ b.  $100 \cdot \varepsilon$

Неверно. Давайте проверим размерность получившейся случайной величины:  
 $100\text{см}^3 \cdot \varepsilon\text{см}^3 = 100\varepsilon\text{см}^6$ . Неверная размерность для объема.

☐ c.  $100 - \varepsilon$

Неверно. В таком случае работница будет сильнее ошибаться в большую сторону, а по условию задачи она склонна "недобирать" тесто

☐ d.  $100 + \varepsilon$

✓ Верно.

Проверить

Рис. 2. Организация отзывов к различным вариантам ответов задачи-тренажера «Математическое ожидание непрерывной случайной величины»

Fig. 2. Organization of responses to various answers to the training problem "Mathematical expectation of a continuous random variable"

ту подсказки, которые помогут ему проверить правильность проводимых им операций или предложат ему способ вычисления;

– если студент исчерпал попытки, в итоговом отзыве предоставить ему правильный ответ и краткое пояснение того, как он может быть получен.

На рис. 3 приведен пример организации обратной связи в задании на введение числового ответа

4. Исследование эффективности электронных задач-тренажеров

Практическая реализация вышеописанной методики заключалась в разработке электронных задач-тренажеров по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Был создан ком-

Вопрос 1  
Осталось попыток: 2  
Балл: 3,0

Итак, для нахождения среднего радиуса получающегося у этой работницы пирожного "Картошка", нам осталось вычислить

$$MR = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \frac{1}{50} \sqrt[3]{100 + \varepsilon} d\varepsilon$$

Это значение равно...

(ответ записать в виде десятичной дроби с 3 знаками после запятой. Допустима ошибка в 0,001)

Ответ:

Подсказка 1:

Неверно.

Подсказка: для вычисления данного интеграла можно воспользоваться методами подведения под знак дифференциала или замены переменной

Попробовать еще раз

Подсказка 2:

Неверно.

Подсказка: воспользуйтесь формулой первообразной от степенной функции  $x^m$

Попробовать еще раз

Итоговый отзыв:

$$MR = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \int_{-30}^{20} \frac{1}{50} \sqrt[3]{100 + \varepsilon} d\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{1}{50} \cdot \int_{-30}^{20} (100 + \varepsilon)^{\frac{1}{3}} d(100 + \varepsilon) =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{3}{4} \cdot (100 + \varepsilon)^{\frac{4}{3}} \Big|_{-30}^{20} = 2,823$$

Итак, среднее значение радиуса получающегося пирожного "Картошка" равно 2,823 см.

Рис. 3. Организация обратной связи в задании на введение числового ответа для задачи-тренажера «Математическое ожидание непрерывной случайной величины»

Fig. 3. Organization of feedback in the task for the introduction of a numerical answer for the training problem "Mathematical expectation of a continuous random variable"

плект задач-тренажеров, включающий задачи по следующим темам:

- математическое ожидание непрерывной случайной величины;
- дисперсия случайной величины;
- эмпирическая функция распределения;
- проверка гипотезы о виде распределения;
- проверка гипотезы независимости;
- проверка гипотезы однородности;
- проверка гипотезы случайности;
- парная линейная регрессия.

Комплект задач-тренажеров был встроен в электронный курс по дисциплине и апробирован в качестве учебного средства для самостоятельной работы студентов инженерных специальностей.

Кроме того, для проверки эффективности использования этих тренажеров в качестве инструмента формирования умения решать задачи в 2020–2021 учебном году был проведен следующий эксперимент: учебный поток студентов по направле-

нию подготовки «Информатика и вычислительная техника» в количестве 84 человек был разбит на 2 группы с приблизительно одинаковым средним баллом по ранее проведенным контрольным по дисциплине ( $p$ -значение критерия Стьюдента для оценки значимости различий средних баллов равно 0,43, что позволяет считать эти различия статистически незначимыми). Студентам экспериментальной группы (41 человек со средним баллом 57,6) в рамках самостоятельной работы было предложено пройти задачи-тренажеры. Студенты контрольной группы (43 человека со средним баллом 56,5) изучали подробно разобранные решения этих же задач, представленные в курсе в виде текстового документа. Затем студенты обеих групп проходили одинаковые тесты по соответствующим темам.

Целью эксперимента было исследовать влияние задач-тренажеров на сформированность компетенции решения математических задач по соответствующим темам.

При планировании эксперимента в качестве методов

статистического анализа были выбраны критерий Стьюдента для независимых выборок и критерий Манна-Уитни (для использования в случае нарушении допущений о нормальности или гомоскедастичности выборок). Априори по известному объему выборки и выбранному уровню значимости критерия  $\alpha = 0,1$  для каждой из предложенных Коэном [1988] ориентировочных величин слабого, умеренного и сильного эффектов была вычислена мощность критерия Стьюдента. Она составила, соответственно, 0,24, 0,73 и 0,98, следовательно, эксперимент, проведенный по данному плану, с достаточно большой вероятностью (98%) позволит обнаружить сильное влияние средства обучения на успешность решения задач, при этом вероятность обнаружить умеренное и слабое влияние невелика. Известно, что для непараметрических тестов мощность всегда меньше, чем у соответствующего параметрического аналога, поэтому вероятность обнаружить слабый и средний эффект с помощью теста Манна-Уитни еще

Таблица 3

## Результаты педагогического эксперимента

Table 3

## Results of the pedagogical experiment

Результирующая переменная	Среднее значение результирующей переменной для соответствующих средств обучения		Метод анализа	$p$ -value	Влияния фактора на результат значимо на уровне 0.1
	задачи-тренажеры	разборы решения задач			
баллы по тесту «Математическое ожидание»	83.4	75.22	Тест Стьюдента с нормальной трансформацией	0.073	да
баллы по тесту «Дисперсия»	62.73	51.6	тест Манна-Уитни	0.628	нет
баллы по тесту «Эмпирическая функция распределения»	72.82	66.39	Тест Стьюдента с нормальной трансформацией	0.055	да
баллы по тесту «Гипотеза о виде распределения»	94.9	83.8	тест Манна-Уитни	0.087	да
баллы по тесту «Гипотеза о независимости»	82.7	67.3	тест Манна-Уитни	0.162	нет
баллы по тесту «Гипотеза однородности»	84.6	78.83	тест Манна-Уитни	0.664	нет
баллы по тесту «Гипотеза случайности»	90.4	80.3	тест Манна-Уитни	0.301	нет
баллы по тесту «Линейная регрессия»	55.53	39.56	Тест Стьюдента с нормальной трансформацией	0.091	да

ниже. Спланированный таким образом эксперимент позволит нам с высокой вероятностью правильно сделать вывод о наличии или отсутствии сильного эффекта от применения в учебном процессе электронных задач-тренажеров.

В табл. 3 представлены результаты статистического анализа влияния фактора «используемое средство обучения» на сформированность компетенции решения задач.

Как видно из таблицы, во всех случаях средние баллы у студентов экспериментальной группы выше, чем у студентов контрольной группы. При этом статистически значимой эта разница является для 4 задач-тренажеров из 8. По остальным задачам-тренажерам положительное влияние не было ярко выраженным (признано статистически незначимым). Это может быть обусловлено как планом эксперимента, позволяющим достаточно достоверно обнаружить лишь сильный эффект, так и, возможно, не совсем удачным дизайном конкретных задач-тренажеров. Поэтому важно, с одной стороны, продолжить работу над улучшением практической реализации предложенной методики, а с другой — повторить эксперимент на большей группе студентов для возможности обнаружения более слабых эффектов.

### Заключение

В работе представлен методологически обоснованный подход к формированию компетенции решения математических задач в электронной среде. В основу методики легли

исследования в области формализации принципов полного цикла решения математических задач. Существующая формализация этапов решения задач Р. Майера, которая включает лингвистический, семантический, схематический, процедурный и стратегический аспекты, дополнена контекстным и аналитическим аспектами. Предложенная методика является универсальной и позволяет разрабатывать электронные средства обучения для формирования математической компетентности в рамках самостоятельной работы студентов.

В качестве средства обучения в электронной среде, позволяющего реализовать все этапы формализации, предлагается использовать электронные задачи-тренажеры. Была разработана структурная модель электронной задачи-тренажера, основанная на полном цикле решения математических задач. С помощью задач-тренажеров в электронной среде появляется возможность не только алгоритмизировать процесс решения задачи и продемонстрировать студентам эффективные стратегии их решения, но и применить основные принципы формирования стойких навыков за счет эффективной организации обратной связи. Предложенная в работе методология организации обратной связи за счет элементов тьюторинга способствует формированию у студентов метакогнитивных навыков: прежде всего рефлексии и самоконтроля.

Методика формирования компетенции решения математических задач апробирова-

на в учебном процессе студентов направления подготовки 09.03.02 — «Информационные системы и технологии» Сибирского федерального университета. Были разработаны 8 задач тренажеров по различным темам дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», которые использовались в процессе апробации методики. Проведенный педагогический эксперимент подтвердил, что применение задач-тренажеров, разработанных на основе предложенной методики, позволяет повысить эффективность формирования праксиологического компонента математической компетентности, в частности компетенции решения математических задач. Полученные результаты могут быть также использованы для разработки электронных задач-тренажеров по другим математическим дисциплинам.

Проведенный педагогический эксперимент также указал, во-первых, на необходимость работы над дизайном задач-тренажеров, во-вторых, на необходимость проведения повторного эксперимента на большем количестве студентов для обнаружения более слабых эффектов воздействия электронных задач-тренажеров на формирование компетенции решения математических задач. Дальнейшее развитие предложенной в работе методики можно рассматривать во включении задач-тренажеров в комплекс мероприятия по формированию и оцениванию сформированности математической компетентности в электронной среде.



## Литература

1. Усова Л.Б., Шакирова Д.У. Практико-ориентированный подход к формированию математической компетентности студентов направления подготовки «Математика и компьютерные науки» // Вестник Оренбургского государственного университета. 2018. № 1(213). С. 77–83.
2. Malmqvist J., Edström K., Rosen A. CDIO Standards 3.0—Updates to the Core CDIO Standards. Proceedings of the 16th International CDIO Conference. 2020. № 1. С. 60–76.
3. Чучалин А.И., Герасимов С.И. Компетенции выпускников инженерных программ: национальные и международные стандарты // Высшее образование в России. 2012. № 10. С. 3–14.
4. Bronov S., Stepanova E., Pichkovskaya S., Sheluhin A., Panikarova N. Information technology in the educational program design. Journal of Physics: Conference Series. 2019. № 3. DOI: 10.1088/1742-6596/1399/3/033066.
5. Есин Р.В., Кустицкая Т.А. Повышение эффективности обучения математике в электронной среде посредством лекций-тренажеров // Информатика и образование. 2019. № 8(307). С. 32–39. DOI: 10.32517/0234-0453-2019-34-8-32-39.
6. Вайнштейн Ю.В., Есин Р.В., Цибульский Г.М. Модель образовательного контента: от структурирования понятий к адаптивному обучению // Открытое образование. 2021. Т. 25. № 1. С. 28–39. DOI: 10.21686/1818-4243-2021-1-4-28-39.
7. Бортник Б.И., Стожко Н.Ю., Судакова Н.П. Оценка компетенций: формализация и формалистика // Современные проблемы науки и образования. 2017. № 4. С. 160.
8. Leutner D., Fleischer J., Grünkorn J., Klieme E. Competence assessment in education: An introduction. In Leutner D., Fleischer J., Grünkorn J., Klieme E (ed.) Competence assessment in education. Cham: Springer, 2017. № 1–6.
9. Зимняя И.А. Компетенция и компетентность в контексте компетентностного подхода в образовании // Ученые записки национального общества прикладной лингвистики. 2013. № 4. С. 16–31.
10. Зеер Э.Ф. Модернизация профессионального образования: компетентностный подход // Образование и наука. 2004. № 3(27). С. 42–52.
11. Хуторской А.В. Методологические основания применения компетентностного подхода к проектированию образования // Высшее образование в России. 2017. №12. С. 85–91.
12. Аронов А.М., Знаменская О.В. О понятии математическая компетентность // Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование. 2010. № 4. С. 31–43.
13. Council Recommendation on key competences for lifelong learning // Official Journal of the European Union. 2018. 189 с. Режим доступа: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=EN](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=EN).
14. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited // Educational Studies in Mathematics. 2019. № 102(1). С. 9–28.
15. Анисова Т.Л. Математические компетенции бакалавров-инженеров: определение, категории, уровни и их оценка // Международный журнал экспериментального образования. 2015. № 11(4). С. 493–497.
16. Binkley M., Erstad O., Herman J., Raizen S., Ripley M., Miller-Ricci M., Rumble M. Defining twenty-first century skills. In Griffin P. McGaw B., Care E. (ed.) Assessment and teaching of 21st century skills. Dordrecht: Springer. 2012. С. 17–66.
17. Baxter G.P. Glaser R. An approach to analyzing the complexity of science performance assessments. CSE Technical Report 452. Los Angeles, CA: CRESST, 1997. 33 с.
18. Szabo Z.K., Körtesi P., Guncaga J., Szabo D., Neag R. Examples of Problem-Solving Strategies in Mathematics Education Supporting the Sustainability of 21st-Century Skills. Sustainability. 2020. № 12(23). С. 10113. DOI: 10.3390/su122310113.
19. Есин Р.В., Вайнштейн Ю.В. Формирование математической компетентности на основе построения индивидуальной образовательной траектории в электронной среде. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2021. 164 с.
20. Polya G. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton: Princeton University Press, 2004. 280 с.
21. Bransford J.D., Stein B.S. The IDEAL problem solver: A guide for improving thinking, learning, and creativity. New York: W. H. Freeman and Company, 1993. 269 с.
22. Mayer R.E. Thinking, problem solving, cognition. New York: W. H. Freeman and Company, 1992. 580 с.
23. Дудырев Ф.Ф., Максименкова О.В. Симуляторы и тренажеры в профессиональном образовании: педагогические и технологические аспекты // Вопросы образования. 2020. № 3. С. 255–276. DOI: 10.17323/1814-9545-2020-3-255-276.
24. Бакулина Е.А. Особенности разработки и использования тест-тренажера в обучении бакалавров педагогического вуза // Развитие современного образования: от теории к практике. 2017. С. 260–265.
25. Напалков С.В. Электронные образовательные тренажеры по математике как эффективное средство развития познавательной активности сельских школьников // Мир науки, культуры, образования. 2012. № 1(32). С. 99–101.
26. Федорова Л.А. Разработка симуляторов для формирования компетенций магистрантов при реализации онлайн-курсов // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 5. С. 230–234.

27. Chini J., Straub C.L., Thomas K. Learning from Avatars: Learning Assistants Practice Physics Pedagogy in a Classroom Simulator // *Physical Review Physics Education Research*. 2016. № 12(1). С. 10117. DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.010117.
28. Жукова Н.В. Возможности использования электронных тест-тренажеров при обучении физической химии // *Фундаментальные исследования*. 2013. № 10(12). С. 2778–2781.
29. Седнев В.А., Аляев П.А. Электронный тренажер пиротехника // *Вестник Санкт-Петербургского университета Государственной противопожарной службы МЧС России*. 2019. № 1. С. 113–120.
30. Василенко Н.П., Чабанова Н.И. Технология электронного обучения в математической подготовке студентов, ориентированных на работу в атомной отрасли // *Глобальная ядерная безопасность*. 2020. № 1(34). С. 125–135.
31. Беляускене Е.А., Имас О.Н., Кривяков С.В., Царева Е.В. Математика для инженеров: поиск оптимального сочетания интерактивных и традиционных методов // *Высшее образование в России*. 2020. № 29(7). С. 22–31. DOI: 10.31992/0869-3617-2020-29-7-22-31.
32. Shirai S., Fukui T. Development and evaluation of a web-based drill system to master basic math formulae using a new interactive math input method. *International Congress on Mathematical Software*. 2014. С. 621–628. DOI: 10.1007/978-3-662-44199-2\_93.
33. Arroyo I., Woolf B.P., Royer J.M., English S. Improving math learning through intelligent tutoring and basic skills training. *Intelligent Tutoring Systems, 10th International Conference, ITS 2010 (Pittsburgh, PA, USA)*. 2010. С. 423–432. DOI: 10.1007/978-3-642-13388-6\_46.
34. Дьячук П.П., Шкерина Л.В., Шадрин И.В., Перегудина И.П. Динамическое адаптивное тестирование как способ самообучения студентов в электронной проблемной среде математических объектов // *Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. ВП Астафьева*. 2018. № 1. С. 48–59. DOI: 10.25146/1995-0861-2018-43-1-40.
35. Боев В.С., Головков А.О., Толмачев А.Р. Обучающий тренажер решения дифференциальных уравнений // *Современные достижения молодежной науки*. 2020. С. 205–216.
36. Асланов Р.М.О., Беляева Е.В., Муханов С.А. Тренажер по дифференциальным уравнениям на основе Wolfram CDF Player // *Сибирский педагогический журнал*. 2015. № 4. С. 26–30.
37. Wang T.H. Implementation of Web-based dynamic assessment in facilitating junior high school students to learn mathematics // *Computers & Education*. 2011. № 56(4). С. 1062–1071.
38. Harks B., Rakoczy K., Hattie J., Besser M., Klieme E. The Effects of feedback on achievement, interest and self-evaluation: The Role of feedback's perceived usefulness // *Educational Psychology*. 2014. № 34(3). С. 269–290. DOI: 10.1080/01443410.2013.785384.
39. Bellhäuser H., Loesch T., Winter C., Schmitz B. Applying a web-based training to foster self-regulated learning—Effects of an intervention for large numbers of participants // *The Internet and Higher Education*. 2016. № 3. С. 87–100. DOI: 10.1016/j.iheduc.2016.07.002
40. Майер Р.В. Кибернетическая педагогика: Имитационное моделирование процесса обучения. Глазов: Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко, 2014. 141 с.

## References

1. Usova L.B., Shakirova D.U. Practice-oriented approach to the formation of the mathematical competence of students in the direction of training «Mathematics and Computer Science». *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of the Orenburg State University*. 2018; 1(213): 77–83. (In Russ.)
2. Malmqvist J., Edström K., Rosen A. CDIO Standards 3.0—Updates to the Core CDIO Standards. *Proceedings of the 16th International CDIO Conference*. 2020; 1: 60–76.
3. Chuchalin A.I., Gerasimov S.I. Competencies of graduates of engineering programs: national and international standards. *Vyssheye obrazovaniye v Rossii = Higher education in Russia*. 2012; 10: 3–14. (In Russ.)
4. Bronov S., Stepanova E., Pichkovskaya S., Sheluhin A., Panikarova N. Information technology in the educational program design. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019; 3. DOI: 10.1088/1742-6596/1399/3/033066.
5. Yesin R.V., Kustitskaya T.A. Improving the effectiveness of teaching mathematics in an electronic environment through lectures-simulators. *Informatika i obrazovaniye = Informatics and Education*. 2019; 8(307): 32–39. DOI: 10.32517/0234-0453-2019-34-8-32-39. (In Russ.)
6. Vaynshteyn YU.V., Yesin R.V., Tsibul'skiy G.M. Model of educational content: from structuring concepts to adaptive learning. *Otkrytoye obrazovaniye = Open education*. 2021; 25; 1: 28–39. DOI: 10.21686/1818-4243-2021-1-4-28-39. (In Russ.)
7. Bortnik B.I., Stozhko N.YU., Sudakova N.P. Assessment of competencies: formalization and formalism. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya = Modern problems of science and education*. 2017; 4: 160. (In Russ.)
8. Leutner D., Fleischer J., Grünkorn J., Klieme E. Competence assessment in education: An

introduction. In Leutner D., Fleischer J., Grünkorn J., Klieme E. (ed.) *Competence assessment in education*. Cham: Springer; 2017: 1-6.

9. Zimnyaya I.A. Competence and competence in the context of the competence-based approach in education. *Uchenyye zapiski natsional'nogo obshchestva prikladnoy lingvistiki = Scientific notes of the National Society of Applied Linguistics*. 2013; 4: 16-31. (In Russ.)

10. Zeyer E.F. Modernization of vocational education: a competence-based approach. *Obrazovaniye i nauka = Education and Science*. 2004; 3(27): 42-52. (In Russ.)

11. Khutorskoy A.V. Methodological grounds for the application of the competence-based approach to the design of education. *Vyssheye obrazovaniye v Rossii = Higher education in Russia*. 2017; 12: 85-91. (In Russ.)

12. Aronov A.M., Znamenskaya O.V. On the concept of mathematical competence. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 20. Pedagogicheskoye obrazovaniye = Bulletin of Moscow University. Series 20. Pedagogical education*. 2010; 4: 31-43. (In Russ.)

13. Council Recommendation on key competences for lifelong learning. Official Journal of the European Union. 2018. 189 c. Режим доступа: [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=EN](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=EN).

14. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*. 2019; 102(1): 9-28.

15. Anisova T.L. Mathematical competence of bachelor-engineers: definition, categories, levels and their assessment. *Mezhdunarodnyy zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya = International Journal of Experimental Education*. 2015; 11(4): 493-497. (In Russ.)

16. Binkley M., Erstad O., Herman J., Raizen S., Ripley M., Miller-Ricci M., Rumble M. Defining twenty-first century skills. In Griffin P. McGaw B., Care E. (ed.) *Assessment and teaching of 21st century skills*. Dordrecht: Springer. 2012: 17-66.

17. Baxter G.P., Glaser R. An approach to analyzing the complexity of science performance assessments. CSE Technical Report 452. Los Angeles, CA: CRESST, 1997. 33 p.

18. Szabo Z.K., Körtesi P., Guncaga J., Szabo D., Neag R. Examples of Problem-Solving Strategies in Mathematics Education Supporting the Sustainability of 21st-Century Skills. *Sustainability*. 2020; 12(23): 10113. DOI: 10.3390/su122310113.

19. Yesin R.V., Vaynshteyn Yu.V. Formirovaniye matematicheskoy kompetentnosti na osnove postroyeniya individual'noy obrazovatel'noy trayektorii v elektronnoy srede = Formation of mathematical competence based on the construction of an individual educational trajectory in an electronic environment. Krasnoyarsk: Siberian Federal University; 2021. 164 p. (In Russ.)

20. Polya G. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press; 2004. 280 p.

21. Bransford J.D., Stein B.S. *The IDEAL problem solver: A guide for improving thinking, learning, and creativity*. New York: W. H. Freeman and Company; 1993. 269 p.

22. Mayer R.E. *Thinking, problem solving, cognition*. New York: W. H. Freeman and Company; 1992. 580 p.

23. Dudyrev F.F., Maksimenkova O.V. Simulators and simulators in vocational education: pedagogical and technological aspects. *Voprosy obrazovaniya = Education Issues*. 2020; 3: 255-276. DOI: 10.17323/1814-9545-2020-3-255-276. (In Russ.)

24. Bakulina Ye.A. Features of the development and use of a test simulator in teaching bachelors of a pedagogical university. *Razvitiye sovremennogo obrazovaniya: ot teorii k praktike = Development of modern education: from theory to practice*. 2017: 260-265. (In Russ.)

25. Napalkov S.V. Electronic educational simulators in mathematics as an effective means of developing the cognitive activity of rural schoolchildren. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya = World of Science, Culture, Education*. 2012; 1(32): 99-101. (In Russ.)

26. Fedorova L.A. Development of simulators for the formation of the competencies of undergraduates in the implementation of online courses. *Sovremennyye naukoemykiye tekhnologii = Modern science-intensive technologies*. 2018; 5: 230-234. (In Russ.)

27. Chini J., Straub C.L., Thomas K. Learning from Avatars: Learning Assistants Practice Physics Pedagogy in a Classroom Simulator. *Physical Review Physics Education Research*. 2016; 12(1): 10117. DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.010117.

28. Zhukova N.V. Possibilities of using electronic test simulators in teaching physical chemistry. *Fundamental'nyye issledovaniya = Fundamental research*. 2013; 10(12): 2778-2781. (In Russ.)

29. Sednev V.A., Alyayev P.A. Electronic simulator pyrotechnics. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta Gosudarstvennoy protivopozharnoy sluzhby MCHS Rossii = Bulletin of the St. Petersburg University of the State Fire Service of the Ministry of Emergencies of Russia*. 2019; 1: 113-120. (In Russ.)

30. Vasilenko N.P., Chabanova N.I. E-learning technology in the mathematical training of students oriented to work in the nuclear industry. *Global'naya yadernaya bezopasnost' = Global Nuclear Safety*. 2020; 1(34): 125-135. (In Russ.)

31. Belyauskene Ye.A., Imas O.N., Krivyakov S.V., Tsareva Ye.V. *Mathematics for Engineers: Searching for the Optimal Combination of Interactive and Traditional Methods*. *Vyssheye obrazovaniye v Rossii = Higher Education in Russia*. 2020; 29(7): 22-31. DOI: 10.31992/0869-3617-2020-29-7-22-31. (In Russ.)



32. Shirai S., Fukui T. Development and evaluation of a web-based drill system to master basic math formulae using a new interactive math input method. International Congress on Mathematical Software. 2014: 621-628. DOI: 10.1007/978-3-662-44199-2\_93.
33. Arroyo I., Woolf B.P., Royer J.M., English S. Improving math learning through intelligent tutoring and basic skills training. Intelligent Tutoring Systems, 10th International Conference, ITS 2010 (Pittsburgh, PA, USA). 2010: 423-432. DOI: 10.1007/978-3-642-13388-6\_46.
34. D'yachuk P.P., Shkerina L.V., Shadrin I.V., Peregudina I.P. Dynamic adaptive testing as a way of self-study of students in the electronic problematic environment of mathematical objects. Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. VP Astaf'eva = Bulletin of the Krasnoyarsk State Pedagogical University named after VP Astafieva. 2018; 1: 48-59. DOI: 10.25146/1995-0861-2018-43-1-40. (In Russ.)
35. Boyev V.S., Golovkov A.O., Tolmachev A.R. Training simulator for solving differential equations. Sovremennyye dostizheniya molodezhnoy nauki = Modern achievements of youth science. 2020: 205-216. (In Russ.)
36. Aslanov R.M.O., Belyayeva Ye.V., Mukhanov S.A. Differential Equations Trainer Based on Wolfram CDF Player. Sibirskiy pedagogicheskiy zhurnal = Siberian Pedagogical Journal. 2015; 4: 26-30. (In Russ.)
37. Wang T.H. Implementation of Web-based dynamic assessment in facilitating junior high school students to learn mathematics. Computers & Education. 2011; 56(4): 1062-1071.
38. Harks B., Rakoczy K., Hattie J., Besser M., Klieme E. The Effects of feedback on achievement, interest and self-evaluation: The Role of feedback's perceived usefulness. Educational Psychology. 2014; 34(3): 269-290. DOI: 10.1080/01443410.2013.785384.
39. Bellhäuser H., Loesch T., Winter C., Schmitz B. Applying a web-based training to foster self-regulated learning—Effects of an intervention for large numbers of participants. The Internet and Higher Education. 2016; 3: 87-100. DOI: 10.1016/j.iheduc.2016.07.002.
40. Mayyer R.V. Kiberneticheskaya pedagogika: Imitatsionnoye modelirovaniye protsessa obucheniya = Cybernetic Pedagogy: Simulation of the Learning Process. Glazov: Glazov State Pedagogical Institute named after V.G. Korolenko; 2014. 141 p. (In Russ.)

#### Сведения об авторах

##### **Татьяна Алексеевна Кустицкая**

К.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности

Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Эл. почта: tkustitskaya@sfu-kras.ru

##### **Роман Витальевич Есин**

К.п.н., доцент кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности

Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Эл. почта: resin@sfu-kras.ru

#### Information about the authors

##### **Tatiana A. Kustitskaya**

Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Security

School of Space and Information Technology, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

E-mail: tkustitskaya@sfu-kras.ru

##### **Roman V. Esin**

Cand. Sci. (Pedagogy), Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Computer Security

School of Space and Information Technology, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

E-mail: resin@sfu-kras.ru