

Математические модели подготовки и проверки качества освоения компетенций в образовательном процессе

В работе рассмотрена оригинальная модель проверки качества компетентностного обучения, основанная на оценке латентных переменных, в том числе и в динамике, и предлагаются методики организации групповых занятий с оценкой их качества.

Ключевые слова: образование, компетенции, математическая модель, групповые занятия, латентные переменные, Раиш-анализ.

MATHEMATICAL MODELS OF TRAINING AND EVALUATION OF COMPETENCE QUALITY ACQUISITION IN EDUCATIONAL PROCESS

The work presents an original model of competence-approach education quality evaluation, based on assessment of latent disposal variable, including dynamics. We offer methods for group work arrangement and its quality evaluation.

Keywords: education, competences, mathematical model, group work, latent disposal variables, Rush analysis

В связи с внедрением новых образовательных стандартов, одним из основных требований к образовательным методикам и технологиям является компетентностный подход [1–4]. Он предполагает не усвоение учащимися отдельных друг от друга знаний и умений, а овладение ими в комплексе. В связи с этим по иному определяется структура методов обучения, увеличивается роль практических занятий – как по объему, так и по форме. В образовательный процесс внедряются новые формы организации практических занятий: деловые игры, диспуты, «мозговой штурм», решение ситуативных задач и другие. Естественно, что компетентностный подход предполагает иные способы проверки качества проводимых занятий.

На сегодняшний день основной технологией проверки качества в образовании является тестирование. Тестирование, как средство обучения и контроля знаний, в образовательных процессах используется давно. Однако в последнее

десятилетие наблюдается явный рост популярности тестовых проверок при оценке качества знаний, что в том числе связано с информатизацией образовательных технологий и повсеместной компьютерной обеспеченностью учебного процесса.

Тестирование, несомненно, имеет ряд преимуществ по сравнению с классическими формами проверки качества знаний. Это, прежде всего, возможность автоматизировать процесс тестирования с помощью ЭВМ, что влечет удобство использования тестовых материалов, снижение трудоемкости, исключение ошибок при проверке, объективность оценивания, широкий спектр тестовых заданий по сравнению с классическими узкими экзаменационными вопросами. Кроме того, тестирование является чуть ли не единственным способом проверки знаний при дистанционном обучении, интерес к которому постоянно растет.

Среди недостатков тестирования можно отметить следующие:

1. Трудность формулировки ответов на вопросы по предметам, связанным с общими законами развития природы, общества, для которых свойственны неоднозначные ответы и двойной логики «да/нет» – недостаточно.

2. Невозможно контролировать творческие знания.

3. Трудность выявления областей знаний, по которым тестирующийся испытывает наибольшие проблемы, и глубины знаний, что довольно легко сделать при беседе с помощью наводящих вопросов.

Авторами предлагаются оригинальные модели организации учебного процесса, включающие в себя новые методы контроля качества. Эти модели в той или иной степени исправляют описанные выше недостатки тестовых проверок. В работе рассмотрена одна из разработанных современных моделей проверки качества обучения, основанная на оценке латентных переменных, излагается новая оценочная модель, устраняющая некоторые недостатки классической, и



Сергей Алексеевич Баркалов,
д.т.н., профессор, академик РАЕН,
почетный строитель РФ,
почетный работник высшей школы
декан факультета экономики,
менеджмента и информационных
технологий, заведующий кафедрой
«Управление строительством»,
Воронежский государственный
архитектурно-строительный
университет
www.vgasu.vrn.ru
Эл. почта: Sbarkalov@nm.ru

Sergey A. Barkalov
D. Sc. in Engineering, professor,
Academician RANS honorary builder of
RF, honorary worker of higher education,
Dean of Economics, Management,
and IT Department, head of the chair
“Management of construction”, Voronezh
state architectural and construction
university
www.vgasu.vrn.ru
Email: Sbarkalov@nm.ru

предлагаются методики организации групповых занятий, позволяющие оценить качество освоения компетенций.

1. Модель освоения качества обучения, основанная на методе Раша оценки латентных переменных

Современной, развешивающей себя и хорошо зарекомендовавшей себя методикой тестирования в образовании является модель, основанная на Раш-анализе [5–7]. Она была предложена датским математиком Георгом Рашем (G. Rusch) в 1960-е гг. для оценки латентных показателей, и ее в последнее время активно внедряют в методики оценки качества образовательного процесса. Предпосылками для осуществления этой идеи было то, что, во-первых, такой показатель, как качество знаний, является латентной переменной [6–7], а во-вторых, модели тестирования являются вероятностными и удобными для Раш-анализа.

Приведем основные понятия предлагаемой модели [6]. В качестве итоговой оценки качества знаний служит латентная, или скрытая, переменная, которая явно не измеряется, но каким-то образом проявляется себя, что можно зафиксировать с помощью регистрируемых переменных, которые называются индикаторными. Единицей измерения латентных переменных являются логиты, некоторые безразмерные величины, которые можно перевести потом в любую другую шкалу. Необходимо подчеркнуть, что шкала измерения латентных переменных на основе модели Раша является линейной и интервальной, что позволяет использовать широкий класс процедур статистического анализа. Кроме того, в интервальной шкале начало отсчета (точка «0») не фиксировано, и с помощью линейных преобразований легко перевести оценки измерений в логитах в другие оценки, например, в баллы. Чаще всего за нуль логитов принимается среднее значение оценок индикаторных переменных.

Модель Раша опирается на четкие и конструктивные понятия

«трудность задания» и «уровень подготовленности». Так, одно задание считается более трудным, чем другое, если вероятность правильного ответа на первое задание меньше, чем на второе, независимо от того, кто их выполняет. Аналогично более подготовленный студент имеет большую вероятность правильно ответить на все задания, чем менее подготовленный. Эти свойства следуют непосредственно из модели.

Пусть в тестировании участвуют n субъектов и тест состоит из m вопросов (дидактических единиц). В задачах тестирования наиболее простой и наглядной является ситуация, когда ответы на индикаторные переменные (тестовые задания) варьируются на двух уровнях: «правильные» – 1 или «неправильные» – 0. Согласно модели Раша вероятность p_{ij} правильного ответа i -го тестируемого на j -е задание определяется логистической функцией

$$p_{ij} = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}, \quad (1)$$

где θ_i – уровень знаний i -го студента (в логитах);
 β_j – трудность j -го задания (в логитах).

Из приведенной формулы следует, что при $\theta_i = \beta_j$, т.е. когда уровень знаний студента равен трудности задания, вероятность правильного ответа $p_{ij} = 1/(1+1) = 0,5$. Если уровень знаний студента значительно превышает трудность задания, т.е. $\theta_i \gg \beta_j$, то вероятность правильного ответа будет стремиться к 1, но никогда не будет равна 1. Таким образом, эта вероятностная модель допускает, что даже отличник может ответить неправильно на очень легкое задание (правда, вероятность неправильного ответа очень мала). С другой стороны, если трудность задания значительно превосходит уровень знания студента, т.е. $\theta_i \ll \beta_j$, то вероятность правильного ответа будет стремиться к 0, но никогда не будет равна 0. Следовательно, даже в такой ситуации модель допускает небольшую вероятность правильного ответа. Это означает, что модель является достаточно гибкой и



Сергей Игоревич Моисеев,
к.ф.-м.н., доцент
Автономная образовательная
негосударственная организация
высшего профессионального
образования
«Институт менеджмента,
маркетинга и финансов»
<http://www.immf.ru/>
Эл. почта: mail@moiseev.su

Sergey I. Moiseev,
PhD in Physics and Mathematics,
Associate Professor
Autonomous educational non-government
institution of higher professional
education "Institute of management,
marketing, and finance"
<http://www.immf.ru/>
Email: mail@moiseev.su

позволяет описывать широкий круг ситуаций.

Ставится задача на основании результатов тестирования оценить параметры θ_i и β_j . Она решается методом максимального правдоподобия (МП-метод) [5].

Исходными данными будет являться матрица:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если тестируемый } i \\ & \text{правильно ответил на} \\ & \text{задание } j; \\ 0, & \text{если тестируемый } i \\ & \text{неправильно ответил на} \\ & \text{задание } j. \end{cases} \quad (2)$$

Функция правдоподобия, из максимизации которой находятся искомые параметры (логиты), равна вероятности того, что все теоретические вероятности ответов на вопросы в совокупности по вероятности приближаются к эмпирическим вероятностям (1) ответов на эти вопросы. То есть параметры выбираются так, чтобы было наибольшее статистическое приближение $p_{ij} \rightarrow x_{ij}$.

Для решения задачи существуют различные математические программные продукты, например Winsteps, RUMM 2020, Facets, Quest, ConQuest, Summary и др.

Отметим еще одно достоинство представленной модели. Используемая классическая балльная система тестирования не является линейной относительно сложности тестовых заданий. Например, при сдаче ЕГЭ для школьника достаточно легко поднять свой уровень знаний с 50 до 60 баллов, а для поднятия на те же 10 единиц, но с 80 до 90 баллов требуется приложить намного больше усилий и усвоить больше материала. А шкала логитов является линейной.

Однако у данного подхода существует и ряд существенных недостатков.

Главным недостатком такого подхода является ограниченность использования исходных данных. Выборка x_{ij} должна быть двоичной и равной 1 (вероятность включается в функцию правдоподобия) либо 0 (не включается). Это ограничение не позволяет применять методику для заданий, ответ на которые может быть дан частично. Однако при

оценке компетенций предполагает возможность неполного выполнения тестовых заданий и множество x_{ij} должно быть нечетким. В какой-то мере данная проблема решена [6, 8, 9] путем введения полиномических индикаторных переменных x'_{ij} , которые могут принимать значения $x' = 0, 1, \dots, m$, имеющие смысл уровня выполнения задания, для которых должны быть определены $\tau_{x'i}$ – относительные трудности x' -й градации i -го задания. Тогда вероятность выбора i -го испытуемого варианта x для j -го задания:

$$P(x_{ij} = x) = p_{ij} = \frac{e^{-\tau_{i1} - \tau_{i2} - \dots - \tau_{ix} + x(\theta_i - \delta_j)}}{\sum_{x'=0}^{m_i} e^{-\tau_{i1} - \tau_{i2} - \dots - \tau_{ix'} + x'(\theta_i - \delta_j)}}. \quad (3)$$

Однако данный подход не позволяет в полной мере использовать тесты с непрерывной оценкой результата и значительно усложняет вычислительную часть задачи.

Вторым существенным недостатком является то, что для практического использования Раш-анализа необходимо специальное программное обеспечение.

Эти недостатки в полной мере исправляет предлагаемая далее модель.

2. Модель оценки латентных переменных, основанная на методе наименьших квадратов

Предлагается кардинально новый подход в расчете оценок логитов, согласно которому МП-метод заменяется методом наименьших квадратов (МНК): параметры θ_i и β_j модели (1) выбираются так, чтобы сумма квадратов отклонений эмпирических данных (2) от расчетных вероятностей (1) была наименьшей.

Задача сводится к минимизации остаточной суммы:

$$S(\theta_i, \beta_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - p_{ij})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(x_{ij} - \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}} \right)^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

В случае нормирования логитов и установки начала отсчета на средние значения логитов, целевая



Наталья Сергеевна Кочерга,
Аспирант,
Московский государственный
университет экономики, статистики
и информатики (МЭСИ)
www.mesi.ru
Эл. почта: skonna@mail.ru

Natalia S. Kocherga,
Post-graduate student,
Moscow State University of Economics,
Statistics and Informatics (MESI)
www.mesi.ru
Email: skonna@mail.ru

Тестируемый	Тестовое задание														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
2	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
3	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
5	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
7	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
8	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
9	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

функция (4) дополняется системой ограничений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \theta_i = 0; \\ \sum_{j=1}^n \beta_j = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Основное преимущество данной модели в том, что в качестве эмпирических данных в ней вместо (2) можно использовать нечеткое множество x_{ij} , имеющее смысл степени решения i -м студентом j -го задания, которая измеряется непрерывно от 0 до 1. Данный подход позволит использовать модель для анализа степени освоения компетенций, которые во многих методиках измеряются по непрерывным и дискретно-непрерывным шкалам. Кроме того, для практического решения задачи не нужны специальные программы. Предлагаемая модель, основанная на МНК, представляет собой классическую задачу нелинейного программирования с целевой функцией (4) и ограничениями (5), численное решение которой возможно с помощью множества прикладных программ [10].

Рассмотрим методику решения задачи в MS Excel на примере.

Пример. Пусть 9 студентов проходили тестирование по 15 тестовым вопросам. Для сравнения с классическим Раш-анализом данные представляют собой четкое множество (ноль или единица), однако ничего не мешает в качестве данных использовать и дробные значения. Результаты тестирования отражены в табл. 1.

Рассмотрим методику нахождения МНК оценок θ_i и β_j на ЭВМ в MS Excel. Исходные данные вносим в электронную таблицу в ячейки В3-Р11, ячейки А3-А11 выделяем под переменные θ , В1-Р1 – под переменные β , в эти ячейки в первом приближении вносим произвольные числа, например единицы. Квадраты отклонений суммы (4) определяем в ячейки В13-Р21. Для этого в В13 вносим формулу $= (B3 - EXP(\$A3 - B\$2)) / (1 + EXP(\$A3 - B\$2)))^2$ и с помощью автозаполнения распространяем ее на ячейки В13-Р21. Целевая функция (4) заносится в ячейку В23 в виде формулы $= СУММ(В13 : Р21)$. Полу-

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2	$\theta_i \beta_j$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
4	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0
5	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
6	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1
7	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
9	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
10	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
11	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1
12																
13		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
14		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
15		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
16		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
17		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
18		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
19		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
20		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
21		0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
22																
23	Целевая	33,75														

Рис. 1. Данные для решения задачи МНК в Excel

Таблица 2.



Соловьева Елена Валентиновна,
аспирант,
Воронежский государственный
архитектурно-строительный
университет
www.vgasu.vrn.ru
Эл. почта: delema88@mail.ru

Elena V. Solovyeva,
Post-graduate student,
Voronezh state architectural and
construction university
www.vgasu.vrn.ru
Email: delema88@mail.ru

Оценки θ

МНК	0,20	1,58	0,84	1,74	0,43	1,25	1,83	1,26	0,99
МП метод	-0,71	0,42	-0,13	0,42	-0,71	0,14	0,71	0,14	-0,13

Оценки β

МНК	0,85	0,28	0,93	0,86	0,00	0,33	0,28	1,43	1,87	2,02	1,31	2,70	1,34	1,42	1,42
МП метод	-0,13	-0,67	-0,25	-0,15	-1,32	-0,65	-0,68	0,17	0,71	0,7	0,26	1,19	0,28	0,2	0,34

чается таблица исходных данных, изображенная на рис. 1.

Затем вызывается надстройка Excel Поиск решения (Solver Add – in) с адресацией на целевую функцию B23 и условием минимизации. При необходимости можно добавить ограничения (5). После выполнения расчетов в ячейках B3-P11 и A3-A11 отображаются оценки параметров θ_i и β_j , по которым можно рассчитать вероятности выполнения студентами заданий (1).

Данную задачу можно решить и с использованием других пакетов прикладных математических программ, например MathCad, Mathematica, MathLab, Maple и др.

Оценки параметров θ_i и β_j , полученные МП-методом (начало отсчета – среднее значение) и МНК (начало отсчета – 0, разные начала отсчета выбраны для лучшей визуализации результатов), для приведенных данных приведены в табл. 2 и на рис. 2.

Видно, что оценки хорошо коррелируют друг с другом. Коэффициент корреляции Пирсона [7] между оценками θ и β , полученными МП-методом и методом МНК, для приведенных данных составляет 0,97 и 0,96. Авторами были проведены расчеты для большого числа различных матриц x_{ij} различного размера и везде получена высокая корреляция. Однако можно наблюдать и расхождения оценок

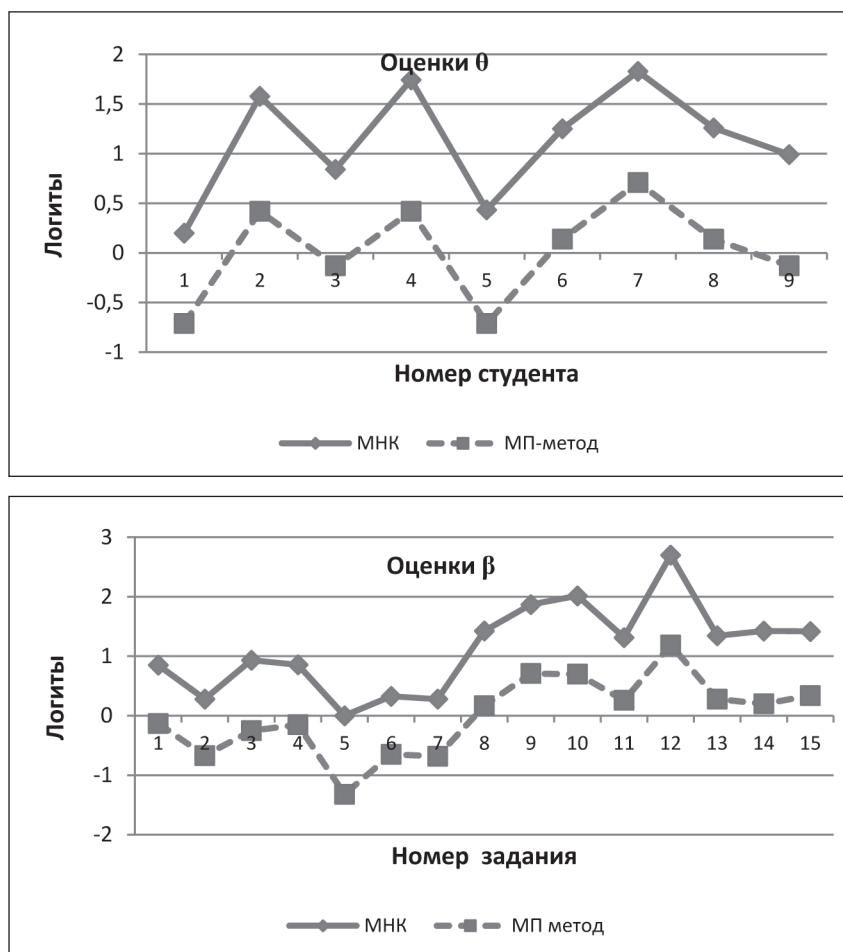


Рис. 2. Оценки параметров, полученные МП-методом и МНК

параметров разными методами. Так, видно, что МП-метод дает более высокую сложность задания № 4 по сравнению с № 3, а также 15-го задания по сравнению с 14-м, в то же время оценки по МНК противоположные. Какой метод дает более объективные оценки – вопрос пока открытый.

Следует отметить, что авторами была предпринята попытка решить данную задачу методом абсолютных отклонений, когда целевая функция принимала вид:

$$S(\theta_i, \beta_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{ij} - p_{ij}| = \\ = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left| x_{ij} - \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}} \right| \rightarrow \min,$$

однако данная модель при численном решении показала плохую сходимость, и ее использование кажется нецелесообразным.

Предлагаемая методика обработки тестовых заданий позволяет использовать методику непрерывного контроля качества обучения, описанную ниже.

3. Динамическая модель контроля качества

Рассмотрим ситуацию, что при проведении обучения постоянно проводится контроль качества усвоения знаний по дидактическим единицам курса. При каждой тестовой проверке формируется матрица (2), позволяющая производить контроль качества на данном этапе. Однако часто нужно иметь некоторый интегральный показатель степени подготовленности учащихся по всем дидактическим единицам и уровня сложности дидактических единиц, который бы учитывал результаты всех тестов в совокупности. Такие показатели в обучении принято называть рейтингом учащихся по дисциплине. Методика обработки результатов тестирования, описанная в предыдущем разделе, позволяет решать подобные задачи. Простейшей (но не единственной) моделью оценки качества обучения в этом случае является формирование единой матрицы результатов тестирования, построенной с применением весовых коэффициентов.

Пусть обучение проводится в r этапов, и на каждом предусмотрено промежуточное тестирование, на k -м этапе тестирования получена матрица результатов (2) вида $x_{ij}^{(k)}$. Важность данного этапа определяется весовым коэффициентом $W^{(k)}$. Тогда итоговую матрицу с обобщенными результатами тестирования можно построить по формуле

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^r x_{ij}^{(k)} \cdot W^{(k)}.$$

Данная матрица будет содержать произвольные значения от 0 до 1, и ее можно обработать методикой, описанной в предыдущем разделе.

4. Организация и оценка качества групповых занятий

В основе одной из методик контроля освоения компетенций лежат групповые задания, когда учащиеся создают группы, которые выполняют некоторые общие комплексные задачи.

Как правило, групповое задание содержит несколько работ, каждую из которых может выполнить как один, так и несколько учащихся. Авторами предлагаются три методики организации выполнения групповых заданий, в основе которых лежат рассмотренные модели оценки латентных переменных.

1) Формирование рабочих коллективов – когда группа учащихся разбивается на подгруппы с различной степенью ответственности и внутри каждой подгруппы определяются роли участников.

2) Случай индивидуального выполнения группового задания – когда каждому участнику поручается только одна работа и каждую работу может выполнить только один участник.

3) Случай совместного выполнения работ группового задания – когда одну работу могут делать сразу несколько учеников и один ученик может участвовать в нескольких работах.

4.1. Случай формирования рабочих коллективов

Пусть число работ в задании m , а число учеников в группе n .

На первом этапе выполняется опрос или тестирование, позво-

ляющее предварительно оценить, может ли каждый участник выполнить каждое задание. В простейшем случае это может быть опрос, где каждый ученик ставит отметку о том, может ли он или не может уверенно выполнить каждую работу. В другом варианте это может быть тест из заданий, определяющий способности учеников выполнять работы.

В результате получаем матрицу (2), построенные по ней Раш-оценки уже можно использовать для выявления сильных и слабых учеников и сложных и легких заданий. Вероятности (1) показывают оценки возможностей учащихся выполнять конкретные работы, но не всего задания в целом, кроме этого, нет оценки такого итогового показателя, как вероятность выполнения задания всей группой.

Далее предлагаются оригинальные продолжения методики оценивания, устраняющие эти недостатки. В основе первой модели, позволяющей разделить группу участников на подгруппы с разной ответственностью и ролями, лежит модель, основанная на *теории парных матричных игр* [11–14].

Согласно модели группа тестируемых играет роль игрока А, выигрыш которого максимизируется. В качестве платежной матрицы игры выступает матрица вероятностей p_{ij} (1). Одним из общих методов решения игровых задач является приведение модели к задаче линейного программирования [14–17]. Вводим некоторые переменные x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, для которых составляется целевая функция и ограничения вида:

$$\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n p_{ij} x_i \geq 1, j = 1, 2, \dots, m; \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Из решения (6) находим оптимальные значения переменных x_i^* , на основании которых определяем цену игры: $v = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^*}$ и вероятности стратегий в смешанной: $P_i = vx_i^*$.

Данные вероятности можно интерпретировать как оптимальные доли участия учеников в общем задании, или, по-другому, как степень доверия ученику, его надежность. Однако следует заметить, что, если игровые стратегии не активные и их вероятности равны нулю, это не означает, что ученику нельзя доверять совсем, просто в оптимальной стратегии ему стоит доверять наименее ответственные роли. Цена игры v имеет смысл при вероятности всей группе выполнить все задание целиком.

Еще одно преимущество данного подхода заключается в следующем. Согласно теореме об активных стратегиях теории матричных игр [11, 14], *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v , если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий*. Перекладывая смысл теоремы на представленную модель, можно сделать вывод, что полученные результаты и вероятность выполнить все задание не будут зависеть от того, какие работы будут содержаться в задании, что позволяет использовать полученные оценки априори, еще не зная, какие работы войдут в групповое задание.

Следует отметить, что данный подход позволяет разбить группу учащихся на подгруппы. Из решения игровой задачи выделяется первая, самая ответственная группа, которой соответствуют активные стратегии игровой задачи, вероятности P_i , которых отличны от нуля. Затем из оставшихся учеников вновь составляется задача теории игр, решение которой позволяет выделить очередную активную группу, но уже с меньшей ответственностью, и т.д. При большом количестве участников это позволяет создать иерархию малых групп, среди которых производится распределение ролей с разной ответственностью – руководители, контролеры, исполнители, помощники и т.д., т. е. моделируется коллектив реальной организации.

4.2. Случай индивидуального выполнения работ группового задания

Рассмотрим случай, когда имеется n учеников (исполнителей), которым нужно выполнить n работ. При этом на одну работу назначается один исполнитель и один ученик может выполнять только одну работу. Нужно так распределить учеников по работам, чтобы суммарная вероятность выполнения всего задания была максимальна.

Из постановки задачи очевидно, что имеем типичную **задачу о назначениях** [16–18]. На первом этапе получают Раш-оценки так же, как и в предыдущем разделе. В качестве матрицы выигрышей с максимальной стоимостью будем использовать матрицу вероятностей (1) (но она должна быть квадратной). Задачу аналитически обычно решают Венгерским методом [18], однако, как и в предыдущем пункте, приведем ее общее решение путем сведения к задаче линейного программирования.

Обозначим за y_{ij} матрицу назначений, которая определяется как:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й ученик будет выполнять задание } j; \\ 0, & \text{если } i\text{-й ученик не будет выполнять задание } j. \end{cases}$$

Тогда математическая модель задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} y_{ij} &\rightarrow \max; \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, & j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} = 1, & i = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \\ y_{ij} &\geq 0, \quad y_{ij} - \text{целое}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение поставленной задачи будет давать оптимальное распределение учеников по работам группового задания. Оценку вероятности выполнения всего группового задания в этом случае также можно получить, но она будет зависеть от структуры задания. Известны вероятности выполнения каждой работы задания. Это значения матрицы

вероятностей (1), соответствующие единицам матрицы назначений y_{ij} . На основании них вычисляется итоговая вероятность. Например, если срыв хотя бы одной работы ведет к невыполнению всего задания, то итоговая вероятность равна единица минус произведение вероятностей невыполнения работ. В простейшем случае можно в качестве оценки использовать среднее значение из вероятностей выполнения всех работ.

4.3. Случай совместного выполнения работ группового задания

Рассмотрим теперь общую ситуацию, когда каждый участник может выполнять каждую из работ (в той или иной доле) и каждую работу делают все участники (также в определенной доле). Эти доли можно рассчитать, используя подход решения **транспортной задачи** [14–17], но с максимизацией результата. Матрица y_{ij} вводится аналогично задаче о назначениях, но она не будет дискретной и ее значения будут иметь смысл доли участника i в работе с номером j . За исходные данные вновь берем матрицу вероятностей (1). Математическая модель задачи для числа участников, равного числу работ, будет:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} y_{ij} &\rightarrow \max; \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_{ij} = 1, & j = 1, 2, \dots, n; \\ \sum_{j=1}^n y_{ij} = 1, & i = 1, 2, \dots, n; \end{cases} \\ y_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно, модель (8) отличается от (7) отсутствием условия целочисленности переменных. Решение задачи в Excel аналогично решению задачи о назначениях, но в ограничениях на рис. 4 будет отсутствовать третье условие. Оптимальное значение целевой функции имеет смысл при сумме вероятностей выполнения работ для всех учеников. Разделив ее на число исполнителей, получим оценку средней вероятности выполнения задания.

Следует отметить, что число учеников и работ в данной моде-

ли не обязательно должны быть равными. В таком случае модель будет основываться на открытой транспортной задаче [16] и в основных ограничениях модели (8) равенства будут изменены на неравенства.

В заключение следует отметить, что предлагаемые модели можно применять не только в образовательном процессе. Методика оценки латентных переменных может быть использована для оценок многих показателей в экономике,

социальной сфере, строительстве и других отраслях, а методы организации групповых занятий могут быть использованы для организации более эффективной работы в трудовых коллективах различного профиля.

Список литературы

1. Андреев А.Л. Компетентностная парадигма в образовании: опыт философско-методологического анализа // Педагогика. – 2005. – № 4. – С. 19–27.
2. Лебедев О.Е. Компетентностный подход в образовании // Школьные технологии. – 2004. – № 5. – С. 3–12.
3. Равен Дж. Компетентность в современном обществе: выявление, развитие и реализация / пер. с англ. – М.: Когито-Центр, 2002.
4. Хуторской А. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированного образования // Народное образование. – 2003. – № 2. – С. 58–64.
5. Rasch G. Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. – Copenhagen: Danmarks Pædagogiske Institut, 1960.
6. Маслак А.А. Измерение латентных переменных в социально-экономических системах: монография. – Славянск-на-Кубани: Изд. центр СГПИ, 2006.
7. Васильев В.И., Красильников В.В., Плакий С.И., Тягунова Т.Н. Статистический анализ многомерных объектов произвольной природы. – М.: ИКАР, 2004.
8. Andrich D. Advanced Social and Educational Measurement. – Perth: Murdoch University, 2001. – 128 p.
9. Wright B.D. Solving measurement problem with the Rasch model // Journal of Educational Measurements. – 1977. – V. 14, № 2. – P. 97–116.
10. Тюрин Ю.Н. Статистический анализ данных на компьютерах / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров; под ред. В.Э. Фигурнова. – М.: ИНФРА-М, 1998.
11. Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
12. Баркалов С.А., Курочка П.Н., Колпачев В.Н. Определение внутренних цен на основе коалиционных игр // Современные сложные системы управления: сб. трудов межд. конф. – Липецк: ЛГТУ, 2001. – С. 9–13.
13. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2010.
14. Баркалов С.А., Белоусов В.Е., Санина Н.В. Квалиметрия: учебник. – Воронеж: Научная книга, 2013.
15. Мусеев С. И., Обуховский А.В. Математические методы и модели в экономике: учеб. пособие. – Воронеж: ИММиФ, 2007.
16. Математические основы управления проектами / под ред. В.Н. Буркова. – М.: Высшая школа, 2005.
17. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1971. Глава 5 Распределительные задачи: назначение и размещение ресурсов.
18. Kuhn Harold W. The Hungarian Method for the assignment problem // Naval Research Logistics Quarterly. – 1955. – № 2. – P. 83–97.